

Aufgabe 1 (*Kurven und Bogenlänge*) (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Kurven regulär sind, und parametrisieren Sie sie nach Bogenlänge:

a) $x: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$

b) $x: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (4t^{3/2}, 3t, 3t^2)$

Aufgabe 2 (*Krümmung*) (6 Punkte)

Gegeben sei die regulär parametrisierte Kurve

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, 1 + \cosh t, 1 - \sin t).$$

a) Bestimmen Sie in jedem Punkt $x(t)$ der Kurve die Krümmung $\kappa(t)$, indem Sie zunächst eine Bogenlängenparametrisierung von x angeben.

b) Berechnen Sie außerdem die Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\|x'(t) \times x''(t)\|}{\|x'(t)\|^3}.$$

Aufgabe 3 (*Singuläre Punkte*) (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden parametrisierten Kurven singuläre Punkte besitzen, bestimmen Sie jeweils den Tangentenvektor sowie die Krümmung in allen regulären Punkten und berechnen Sie ihre Länge.

a) *Zykloide* vom Radius $r > 0$:

$$x: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (rt - r \sin t, r - r \cos t, 0).$$

b) *Traktrix*:

$$x: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0).$$

Hinweis: Für die Krümmung in einem regulären Punkt $x(t)$ einer beliebig parametrisierten Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt die Formel

$$\kappa(t) = \frac{\|x'(t) \times x''(t)\|}{\|x'(t)\|^3}.$$