Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 5 **11.11.2019**

Aufgabe 1 (*Ebene Kurve?*) *(6 Punkte)*
Gegeben sei die Kurve

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (-\sinh(2t), e^{-2t}, \cosh(2t)).$$

a) Zeigen Sie, dass x regulär ist und keine Punkte mit Krümmung 0 besitzt.

b) Begründen Sie, ob x eine ebene Kurve ist.

Aufgabe 2 (*Ein gekräuseltes Geschenkband*) *(8 Punkte)*
Ein unendlich langes gekräuseltes Geschenkband sei durch die Kurve

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t), e^t)$$

beschrieben.

a) Berechnen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Winkel $\phi(t)$ zwischen dem Vektor $(0, 0, 1)$ und der Schmiegeebene von x im Punkt $x(t)$. Sie dürfen dabei verwenden, dass der Binormalenvektor an der Stelle $x(t)$ ein skalares Vielfaches von $x'(t) \times x''(t)$ ist.

b) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von x.

c) Berechnen Sie den Limes von $\kappa(t), \tau(t)$ und $\phi(t)$ jeweils für $t = -\infty$ und $t = \infty$.

d) Erstellen Sie zwei Skizzen der Kurve im Raum und der Schmiegeebene an $x(t)$, jeweils für einen betragsmäßig großen positiven und negativen Wert von t. (Hinweis: Die Kurve befindet sich auf der Oberfläche eines Zylinders. Vergleichen Sie sie mit der Schraubenlinie.)

   Können Sie sich an den Skizzen anschaulich die Grenzwerte aus Teilaufgabe c) erklären?

Aufgabe 3 (*Mehr Krümmung und Torsion*) *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie Krümmung und Torsion der Kurve

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t, 2 - \cosh(t), e^t).$$

Abgabe am 18.11.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.