Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie — **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 6 — **18.11.2019**

Aufgabe 1 (*Noch mehr Krümmung und Torsion*) (*6 Punkte*)
Sei die reguläre Kurve $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$t \mapsto \left(\sqrt{2}\cos(t), \sin(t) - t, \sin(t) + t\right).$$

a) Berechnen Sie Krümmung und Torsion von x in jedem Punkt $x(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve x durch eine euklidische Bewegung auf eine Helix

$$y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t), ct)$$

für $r > 0$ und $c \geq 0$ abgebildet werden kann.

c) Berechnen Sie die Größen r und c.

Aufgabe 2 (*Graphkurven*) (*6 Punkte*)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und

$$x\colon I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$$

eine ebene Kurve.

a) Berechnen Sie für alle $t \in I$ in Abhängigkeit von f den Tangentialvektor $T(t)$, den positiv orientierten Normalenvektor $N^+(t)$ und die geodätische Krümmung $\kappa_g(t)$ im Punkt $x(t)$.

b) Bestimmen Sie T, N^+ und κ_g für die Fälle (i) $f(t) = t^3 - t$, (ii) $f(t) = \cosh(t)$.

c) Die Evolute einer Kurve x ist die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von x. Berechnen Sie für die die in b) vorgegebenen Funktionen f die Evolute von x.

Aufgabe 3 (*Eine Kurve in verschiedenen Darstellungen*) (*6 Punkte*)
Für eine Zahl $a > 0$ betrachten wir die Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die

$$x_1^2 = a^2 x_2^3$$

gilt. Diese Punktemenge beschreibt die Spur einer Kurve x.

a) Skizzieren Sie die Kurve x für die Werte $a = 1, 2, 3$.

b) Bestimmen Sie eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $h : U \to \mathbb{R}$, sodasss h eine implizite Kurvendarstellung eines nichtleeren Teils von x ist.

c) Bestimmen Sie eine explizite Kurvendarstellung eines nichtleeren Teils von x. Warum gibt es keine explizite Kurvendarstellung für ganz x?

d) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Kurve x.

Abgabe am 25.11.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.