Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 7 **25.11.2019**

Aufgabe 1 (*Loxodrome*) *(6 Punkte)*

Wir betrachten die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$x\colon [0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}^3,\quad (u^1,u^2)\mapsto(\cos u^2\cos u^1,\cos u^2\sin u^1,\sin u^2)$$

und darauf eine *Loxodrome*, die gegeben ist durch

$$c\colon(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}^3,\quad t\mapsto x(l(t),t)\quad\text{mit}\quad l(t):=\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right).$$

a) Berechnen Sie die Länge dieser Flächenkurve.

b) Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Raumkurven ist definiert als der Winkel zwischen den beiden Tangenten am Schnittpunkt. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Kurve c und den u^1-Parameterlinien (Breitenkreise).

Hinweis: Es gilt $l'(t)=\frac{1}{\cos t}$. Es hilft, die Definition von $l(t)$ nicht einzusetzen.

Aufgabe 2 (*Sattelfläche*) *(6 Punkte)*

Wir betrachten das parametrisierte Flächenstück

$$x\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad(u^1,u^2)\mapsto(u^1-u^2,u^1+u^2,(u^1)^2-(u^2)^2).$$

a) Bestimmen Sie den Rang der Jacobi-Matrix $J_x(u)$ für alle $u\in\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie die Parameterlinien und überprüfen Sie, ob die Parameterlinien ebene Kurven sind.

c) Berechnen Sie die Krümmung der Parameterlinien und geben Sie die Punkte mit maximaler und minimaler Krümmung an.

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 3 (*Eine Tangentenfläche*) (*6 Punkte*)

Für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3,\ s \mapsto c(s)$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, und $x\colon I \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ eine durch

$$x(u^1, u^2) := c(u^1) + u^2 \cdot c'(u^1)$$

definierte Regelfläche.

a) Zeigen Sie, dass $(u_0^1, u_0^2) \in I \times [0,\infty)$ genau dann ein regulärer Punkt von x ist, wenn gilt:

$$c''(u_0^1) \neq o \quad \text{und} \quad u_0^2 \neq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass in den regulären Punkten von x für den Vektor

$$n(u^1, u^2) := \frac{x_{u^1}(u^1, u^2) \times x_{u^2}(u^1, u^2)}{\|x_{u^1}(u^1, u^2) \times x_{u^2}(u^1, u^2)\|}$$

und den Binormalenvektor $B(s)$ der Kurve c folgender Zusammenhang besteht:

$$n(u^1, u^2) = \pm B(u^1).$$

Abgabe am 02.12.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.