Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 8 **02.12.2019**

Aufgabe 1 (*Drehfläche*) (*6 Punkte*)
Gegeben sei eine parametrisierte Kurve

$$c\colon I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto c(t) = (c_1(t), 0, c_3(t))$$

in der (x_1, x_3)-Ebene sowie die daraus entstehende Drehfläche mit der Parametrisierung

$$x\colon [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto \left(c_1(u^2)\cos(u^1), c_1(u^2)\sin(u^1), c_3(u^2)\right).$$

a) Zeigen Sie, dass diese Parametrisierung regulär ist, falls die Kurve c regulär ist und $c_1(t) > 0$ für alle $t \in I$ gilt.

b) Die Kurve c sei nun regulär an der Stelle $t \in I$ und es gelte $c_1(t) > 0$. Geben Sie für $u_0 = (\pi/2, t) \in [0, 2\pi] \times I$ die Tangentialebene $E(u_0)$ im Punkt $x(u_0)$ sowohl in Parameterform als auch in Hesse-Normalform an.

c) Bestimmen Sie für alle regulären Punkte der Drehfläche das Gaußsche begleitende Dreibein.

Aufgabe 2 (*Einschaliges Hyperboloid*) (*6 Punkte*)
Gegeben sei das parametrisierte Flächenstück

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad u = (u^1, u^2) \mapsto \left(u^2\cos(u^1) + \sin(u^1), u^2\sin(u^1) - \cos(u^1), \frac{1}{\sqrt{2}}u^2\right).$$

a) Zeigen Sie, dass x eine Regelfläche ist, und geben Sie ihre Basiskurve sowie ihre Richtungskurve an.

b) Bestimmen Sie eine implizite Darstellung der Fläche x. Hinweis: Was ist $x_1(u)^2 + x_2(u)^2$?

c) Überprüfen Sie ob x regulär parametrisiert ist und bestimmen Sie in allen regulären Punkten von x das Gaußsche begleitende Dreibein.

Aufgabe 3 (*Hyperbolisches Paraboloid*) (*6 Punkte*)
Gegeben sei das parametrisierte Flächenstück

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad u = (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, u^1u^2).$$

a) Zeigen Sie, dass die parametrisierte Fläche

$$\tilde{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \mapsto (\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2, \tilde{u}^1 + \tilde{u}^2, (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2)$$

eine Umparametrisierung von x ist.

b) Bestimmen Sie für die beiden Parametrisierungen x und $\tilde{x}$ jeweils das Gaußsche begleitende Dreibein.

Abgabe am 09.12.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.