Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie
für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 9 **09.12.2019**

Aufgabe 1 (*Hyperbolisches Paraboloid II*) *(6 Punkte)*
Gegeben sind zwei Parametrisierungen

$$x\colon U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad u = (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, u^1u^2),$$
$$\tilde{x}\colon \tilde{U} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad \tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \mapsto (\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2, \tilde{u}^1 + \tilde{u}^2, (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2)$$

desselben hyperbolischen Paraboloids aus Aufgabe 3, Übungsblatt 8. Gegeben sei auch die Raumkurve

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\quad t \mapsto (2\cosh t, 2\sinh t, 2\sinh(2t)).$$

a) Zeigen Sie, dass c eine Flächenkurve im hyperbolischen Paraboloid ist und bestimmen Sie die Kurven

$$u\colon \mathbb{R} \to U,\quad t \mapsto u(t) = (u^1(t), u^2(t)),$$
$$\tilde{u}\colon \mathbb{R} \to \tilde{U},\quad t \mapsto \tilde{u}(t) = (\tilde{u}^1(t), \tilde{u}^2(t)),$$

für die die Gleichungen $c = x \circ u = \tilde{x} \circ \tilde{u}$ erfüllt sind.

b) Schreiben Sie für $t \in \mathbb{R}$ den Tangentenvektor von c als Linearkombination

(i) der partiellen Ableitungen x_{u^1} und x_{u^2} von x im Punkt $x(u(t)) = c(t)$,

(ii) der partiellen Ableitungen $\tilde{x}_{\tilde{u}^1}$ und $\tilde{x}_{\tilde{u}^2}$ von $\tilde{x}$ im Punkt $\tilde{x}(\tilde{u}(t)) = c(t)$.

c) Bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen von x und $\tilde{x}$.

Aufgabe 2 (*Wendelfläche*) *(6 Punkte)*
Gegeben sei die Wendelfläche mit der Parametrisierung

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad (u^1, u^2) \mapsto (u^2\cos u^1, u^2 \sin u^1, u^1),$$

sowie die Raumkurve

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\quad t \mapsto (\sinh t \cos t, \sinh t \sin t, t).$$

a) Untersuchen Sie, ob x regulär ist, und bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen von x.

b) Zeigen Sie, dass die Kurve c eine Flächenkurve auf der Wendelfläche ist, und bestimmen Sie die Kurve $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ im Definitionsbereich von x an, für die die Gleichung $c = x \circ u$ erfüllt ist.

c) Bestimmen Sie in jedem Punkt $c(t)$ den Winkel zwischen c und der u^1-Parameterlinie durch $c(t)$ sowie zwischen c und der u^2-Parameterlinie durch $c(t)$.

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 3 (*Erste Fundamentalgrößen*) (*6 Punkte*)

a) Sei $l\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $l''(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von l die ersten Fundamentalgrößen der Tangentenfläche

$$x\colon I \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto l(u^1) + u^2 l'(u^1).$$

b) Sei

$$c\colon I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (c_1(t), 0, c_3(t))$$

eine reguläre Kurve in der (x_1, x_3)-Ebene mit $c_1(t) > 0$ für alle $t \in I$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c die ersten Fundamentalgrößen der Drehfläche

$$x\colon [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2)).$$

Abgabe am 16.12.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.