Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 10 **16.12.2019**

Aufgabe 1 (*Einschaliges Hyperboloid II*) (*6 Punkte*)

Gegeben sei das parametrisierte Flächenstück

$$x\colon U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad u = (u^1, u^2) \mapsto \left(u^2 \cos(u^1) + \sin(u^1), u^2 \sin(u^1) - \cos(u^1), \frac{1}{\sqrt{2}}u^2\right)$$

und die Raumkurve

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - t, \frac{1}{\sqrt{2}} + t, t\right).$$

a) Zeigen Sie, dass c eine Flächenkurve auf x ist, und bestimmen Sie die Kurve

$$u\colon \mathbb{R} \to U, \quad t \mapsto u(t) = (u^1(t), u^2(t))$$

sodass $c(t) = x(u(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Schreiben Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Tangentenvektor von c im Punkt $c(t)$ als Linearkombination der Richtungsableitungen x_{u^1} und x_{u^2} von x im Punkt $c(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung von c in Teilaufgabe a).

c) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien der u^1- und u^2-Parameterlinien von x.

d) Bestimmen Sie eine Flächenkurve l, die orthogonal zu den u^2-Parameterlinien von x ist und durch den Punkt $x(\pi/2, 0) = (1, 0, 0)$ verläuft.

Hinweis: Schreiben Sie $l(t)$ als $x(\tilde{u}(t))$. Was für Bedingungen muss $\tilde{u}$ erfüllen?

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 2 (*Erste Guldinsche Regel*) *(6 Punkte)*

Sei $I = (0, L) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei

$$c : I \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (c_1(t), 0, c_3(t))$$

eine regulär parametrisierte Kurve in der (x_1, x_3)-Ebene mit $c_1(t) > 0$ für alle t. Sei

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche $\mathcal{F}$, die durch Drehung von c um die x_3-Achse entsteht.

a) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ folgende Formel gilt:

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = 2\pi \int_0^L c_1(t) \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

b) Sei c nun nach Bogenlänge parametrisiert. Sei

$$S := \frac{1}{L} \int_0^L c(t) \, \mathrm{d}t$$

der *Schwerpunkt* von c, und sei R der Abstand von S zur x_3-Achse. Beweisen Sie mithilfe von Teilaufgabe a) die *erste Guldinsche Regel*

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = 2\pi R L.$$

Abgabe am 20.12.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.