Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 11 **20.12.2019**

Bonusaufgabe (*Trajektorien*) (*6 Punkte*)

Gegeben ist die übliche Parametrisierung

$$x\colon [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^2 \cos u^1, \cos u^2 \sin u^1, \sin u^2)$$

der Einheitssphäre. Sei $\alpha \in (0, \pi)$.

a) Bestimmen Sie die α-Trajektorien in x zu den u^1-Parameterlinien.

b) Bestimmen Sie die α-Trajektorie in x zu den u^1-Parameterlinien, die durch den Punkt $x(0, 0) = (1, 0, 0)$ verläuft.

Hinweis: Eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cos t}$ ist $l(t) := \ln\left(\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right)$.

Aufgabe 1 (*Flächeninhalte*) (*6 Punkte*)

Bestimmen Sie die Flächeninhalte der folgenden parametrisierten Flächenstücke:

a) $x\colon [0, a] \times (0, b], \quad (u^1, u^2) \mapsto \left(u^1, u^2, \sqrt{3(u^1)^2 + 3(u^2)^2}\right)$,

b) $x\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto ((3 + 2\cos u^2)\cos u^1, (3 + 2\cos u^2)\sin u^1, 2\sin u^2)$,

c) $x\colon \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : (u^1)^2 + (u^2)^2 < 4\} \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, u^1 \cdot u^2)$.

Aufgabe 2 (*Transformationsgesetz*) (*6 Punkte*)

Bestimmen Sie für die folgenden Parametriserungen x und $\tilde{x}$ desselben Flächenstücks jeweils die Matrix (g_{ij}) bzw. $(\tilde{g}_{ij})$ der ersten Fundamentalgrößen und eine Parametertransformation u mit $\tilde{x} = x \circ u$, und rechnen Sie nach, dass in diesem Fall das Transformationsgesetz

$$(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) = J_u(\tilde{u})^\top (g_{ij}(u(\tilde{u}))J_u(\tilde{u})$$

erfüllt ist.

a) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2})$,
$\tilde{x}\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \mapsto (\tilde{u}^2 \cos \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 \sin \tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

b) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, u^1 u^2)$,
$\tilde{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \mapsto (\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2, \tilde{u}^1 + \tilde{u}^2, (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2)$.

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Aufgabe 3 (*Normalschnitte*) *(6 Punkte)*

Gegeben sei die parametrisierte Fläche

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto \big(u^1, u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2\big)\,.$$

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung aller Normalschnitte von x im Punkt $x_0 = x(0,0)$.

b) Berechnen Sie die Krümmung dieser Normalschnitte im Punkt x_0.

c) Bestimmen Sie diejenigen Einheitsvektoren in der Tangentialebene $E(0,0)$ von x im Punkt x_0, für die die Krümmung des zugehörigen Normalschnittes im Punkt x_0 gleich 0 ist.

Erinnerung: Die Krümmung einer Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ an der Stelle t ist gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}.$$

Abgabe am 13.01.2020 um 9:45 zu Beginn der Übung.