Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 13 **20.01.2020**

Aufgabe 1 (*Hauptkrümmungen von Drehflächen*) (*6 Punkte*)
Ggegeben sei die Drehfläche (vgl. Aufgabe 2, Blatt 12)

$$x\colon [0,2\pi]\times I \to \mathbb{R}^3,\quad (u^1,u^2)\mapsto (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2)).$$

Hierbei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $c: I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve sodass $c_1(t) > 0$ für alle $t \in I$ gilt.

a) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen dieser Drehfläche, indem Sie ein Extremwertproblem mit Nebenbedingungen lösen.

   Hinweis: Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren und lassen Sie dabei die ersten und zweiten Fundamentalgrößen zunächst als Variablen stehen.

b) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen der Drehfläche im Fall $c(t) = (\sqrt{1+t^2}, 0, t)$.

Aufgabe 2 (*Krümmungen in einem Punkt*) (*6 Punkte*)
Gegeben sei die parametrisierte Fläche

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad (u^1,u^2)\mapsto \left(u^1 - u^2\sin u^1,\ u^2 e^{u^1u^2},\ e^{2u^1-2u^2}\right).$$

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen, mittlere Krümmung und Gaußkrümmung von x im Punkt $x(0,0)$.

Hinweis: Sie benötigen die Fundamentalgrößen von x nur im Punkt $x(0,0)$. Bestimmen Sie nicht mehr als unbedingt nötig.

Aufgabe 3 (*Krümmungslinien*) (*6 Punkte*)
Gegeben sei für $a > 0$ die parametrisierte Fläche

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad (u^1,u^2)\mapsto (u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, au^1).$$

a) Berechnen Sie in allen Punkten der Fläche die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.

b) Bestimmen Sie im Fall $a = 1$ die Krümmungslinien, und geben Sie für die beiden Krümmungslinien durch den Punkt $x(0,0) = (0,0,0)$ jeweils eine Parametrisierung an.

Hinweise:

- Die Differentialgleichung für Krümmungslinien lautet

$$(b_{21}g_{11} - b_{11}g_{21})(\dot u^1)^2 + (b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22})\dot u^1\dot u^2 + (b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22})(\dot u^2)^2 = 0.$$

- Die Ableitung der Funktion $f\colon t\mapsto \operatorname{arsinh}(t)$ ist $f'\colon t\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Abgabe am 27.01.2020 um 9:45 zu Beginn der Übung.