Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 14 **27.01.2020**

Aufgabe 1 (*Helikoid*) *(6 Punkte)*
Gegeben sei das Helikoid mit der Parametrisierung

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1,u^2) \mapsto (\cos u^1 \sinh u^2, \sin u^1 \sinh u^2, u^1).$$

a) Zeigen Sie, dass x eine Minimalfläche ist, und berechnen Sie an jeder Stelle von x die Gaußkrümmung.

b) Bestimmen Sie alle Krümmungslinien von x.

Aufgabe 2 (*Asymptotenlinien*) *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie, ob die folgenden Flächen Asymptotenlinien besitzen, und wenn ja, bestimmen Sie alle Asymptotenlinien:

a) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1,u^2) \mapsto (2u^1, 2u^2, (u^1)^2 + (u^2)^2)$

b) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1,u^2) \mapsto (2u^1, 2u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2)$

Hinweis: Die Differentialgleichung für Asymptotenlinien lautet

$$b_{11}(\dot u^1)^2 + 2b_{12}\dot u^1 \dot u^2 + b_{22}(\dot u^2)^2 = 0.$$

Aufgabe 3 (*Geodätische*) *(6 Punkte)*
Gegeben sei die Helix $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$. Die zugehörige Tangentenfläche ist gegeben durch

$$x\colon I \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1,u^2) \mapsto \ell(u^1) + u^2\ell'(u^1).$$

(Achtung: ℓ ist *nicht* wie in Aufgabe 1, Blatt 12, nach Bogenlänge parametrisiert!)

a) Bestimmen Sie alle Asymptotenlinien von x.

b) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole von x und geben Sie die Differentialgleichungen für Geodätische von x an.

c) Zeigen Sie, dass die u^2-Parameterlinien von x Geodätische sind.

Abgabe am 03.02.2020 um 9:45 zu Beginn der Übung.