Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Übungsblatt 15 (Keine Abgabe) **03.02.2020**

Aufgabe 1 (*Clairaut-Relation*)

a) Gegeben sei das Rotationshyperboloid mit der Parametrisierung

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos(u^1)\cosh(u^2), \sin(u^1)\cosh(u^2), \sinh(u^2).$$

Sei c die Geodätische auf x durch den Punkt $(1, 1, 1)$, die mit dem Breitenkreis durch $(1, 1, 1)$ einen Winkel von $45°$ bildet. Zeigen Sie, dass c die (x_1, x_2)-Ebene nicht schneidet.

b) Gegeben sei die Pseudosphäre mit der Parametrisierung

$$x\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto \left(\frac{\cos u^1}{\cosh u^2}, \frac{\sin u^1}{\cosh u^2}, u^2 - \tanh u^2\right),$$

sowie die Geodätische c auf x durch $(1, 0, 0)$, die mit dem Breitenkreis von x durch $(1, 0, 0)$ einen Winkel von $60°$ bildet. Bestimmen Sie alle Breitenkreise von x, die von c geschnitten werden.

Aufgabe 2 (*Stereographische Projektion*)
Gegeben sei die obere Schale des zweischaligen Hyperboloids, parametrisiert als

$$x\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos(u^1)\sinh(u^2), \sin(u^1)\sinh(u^2), \cosh(u^2)).$$

Die stereographische Projektion Φ ordnet jedem Punkt p auf x genau einen Punkt $\Phi(p)$ auf der Ebene $E := \{(v^1, v^2, 1) : v^1, v^2 \in \mathbb{R}\}$ zu, und zwar den Schnittpunkt von E mit der Geraden durch p und $o = (0, 0, 0)$.

a) Geben Sie die Parametrisierung

$$\bar{x}\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to E, \quad (u^1, u^2) \mapsto \Phi(x(u^1, u^2))$$

des Abbilds von x unter stereographischer Projektion Φ explizit an.

b) Ist Φ eine konforme Abbildung?

Keine Abgabe.