Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Präsenzblatt 3 für die Übung am 04.11.2019 (nicht schriftlich abgeben!)

Präsenzaufgabe 1 (*Krümmung von Kurven*)

a) Was ist die Krümmung einer parametrisierten Kurve? Wie sieht sie bildlich aus, was ist ihre formale Definition?

b) Zeichnen Sie die Spur einer regulären Kurve $x(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$

   i) mit konstanter Krümmung $c > 0$,

   ii) mit unbeschränkter Krümmung.

c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Krümmung der Helixkurve $x(t) = (\cos(t), \sin(t), \alpha t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

d) Zeigen Sie: Wenn eine reguläre Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ überall Krümmung 0 hat, liegt ihre Spur in einer Geraden.

Präsenzaufgabe 2 (*Hyperbolische Funktionen*)
Sinus hyperbolicus und *Cosinus hyperbolicus* sind Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$$

Andere hyperbolische Funktionen sind gegeben durch

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}, \quad \coth(t) = \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}, \quad \operatorname{sech}(t) = \frac{1}{\cosh(t)}, \quad \operatorname{csch}(t) = \frac{1}{\sinh(t)}$$

analog zum üblichen Sinus und Kosinus.

a) Zeichnen Sie Funktionsgraphen dieser sechs hyperbolischen Funktionen.

b) Hyperbolische Funktionen haben Identitäten, die sehr ähnlich zu den bekannten trigonometrischen Identitäten sind:

   - $1 = +\cosh(t)^2 + \sinh(t)^2$
   - $\sinh'(t) = +\cosh(t), \quad \cosh'(t) = -\sinh(t)$
   - $\sinh(s+t) = +\sinh(s)\cosh(t) + \cosh(s)\sinh(t)$
   - $\cosh(s+t) = +\cosh(s)\cosh(t) - \sinh(s)\sinh(t)$

   Leider sind einige dieser Gleichungen falsch. Korrigieren Sie diese Gleichungen, indem Sie nur Vorzeichen ändern.

Keine Abgabe. Die Aufgaben werden am 04.11.2019 in der Übung besprochen.