Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Präsenzblatt 5 für die Übung am 18.11.2019 (nicht schriftlich abgeben!)

Präsenzaufgabe 1 (*Hyperbolische Schraubenlinie*)
Gegeben sei die Kurve $x\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}^3$ durch

$$t \mapsto (\sqrt{2}\ln t,\ t,\ 1/t).$$

a) Zeigen Sie, dass x eine Böschungslinie ist und geben Sie einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ an, sodass für alle t der Winkel α zwischen $T(t)$ und v konstant ist. Bestimmen Sie außerdem diesen Winkel $\alpha \in [0,\pi]$.

b) Zeigen Sie, dass x durch eine geeignete euklidische Bewegung auf die hyperbolische Schraubenlinie

$$y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r\cosh t, r\sinh t, rt)$$

vom Radius $r = \sqrt{2}$ abgebildet werden kann.

c) *Bonus*: Beweisen Sie, dass $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\sqrt{2}t,\ \sqrt{3}t^2,\ \sqrt{2}t^3)$ eine Böschungslinie ist.

Präsenzaufgabe 2 (*Implizite Darstellungen*)
Seien $\alpha, \beta > 0$. Geben Sie implizite Darstellungen der folgenden Kurven an:

a) $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\alpha\cosh(t), \beta\sinh(t))$

b) $x\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin(t), \sin(3t))$

Präsenzaufgabe 3 (*Ebene Kurven und geodätische Krümmungen*)

a) Zeichnen Sie eine ebene parametrisierte Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, deren geodätische Krümmung $\kappa_g(t)$ streng monoton von $-\infty$ nach ∞ steigt.

b) Zeichnen Sie eine ebene parametrisierte Kurve $x(t)$, deren geodätische Krümmung genau die Werte von -5 bis -10 annimmt. Wählen Sie dazu einen geeigneten Maßstab.

c) Sei $x : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene ebene reguläre Kurve, sodass $\|x(t)\| < 1$ gilt für alle $t \in [0,1]$. Überlegen Sie, warum es ein $t \in [0,1]$ geben muss, sodass $\kappa(t) \geq 1$ gilt.

Keine Abgabe. Die Aufgaben werden am 18.11.2019 in der Übung besprochen.