Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie
für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Präsenzblatt 6 für die Übung am 25.11.2019 (nicht schriftlich abgeben!)

Präsenzaufgabe 1 (*Reguläre Flächen*)
Sei $R > r > 0$. Entscheiden Sie für folgende Flächenstücke, ob sie regulär sind; falls nicht, geben Sie alle singulären Punkte an.

a) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ (u^1, u^2) \mapsto (u^1,\ (u^1)^2,\ u^1u^2)$ (Whitney-Regenschirm)

b) $x\colon [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \ (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos(u^1),\ u^2 \sin(u^1),\ \sin(2u^1))$ (Plücker-Konoid)

c) $x\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos u^2)\cos u^1 \\ (R + r\cos u^2)\sin u^1 \\ r \sin u^2 \end{pmatrix}$ (Siehe Aufgabe 2)

Präsenzaufgabe 2 (*Parameterlinien*)
Sei $R > r > 0$. Bestimmen Sie die Parameterlinien folgender Flächen und stellen Sie davon eine Skizze an. Um welche Flächen handelt es sich?

a) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos(u^1), u^2 \sin(u^1), u^1)$

b) $x\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \ (u^1, u^2) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos u^2)\cos u^1 \\ (R + r\cos u^2)\sin u^1 \\ r \sin u^2 \end{pmatrix}$

c) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ (u^1, u^2) \mapsto ((u^1)^2 - (u^2)^2,\ 2u^1u^2,\ (u^1)^2 + (u^2)^2)$

Präsenzaufgabe 3 (*Parametrisierungen entwerfen*)
Identifizieren Sie für folgende als Punktmengen gegebene Flächen zwei Werte, die die Lage eines Punktes der Fläche eindeutig bestimmen, und erstellen Sie daraus eine Parametrisierung:

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1^2 < x_1^2 + x_2^2 < 2^2,\ x_3 = 0\}$ (Kreisring)

b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}$ (Schale eines zweischaligen Hyperboloids)

c) $\{a_1P + a_2Q + a_3R : a_1, a_2, a_3 > 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$ (Dreieck mit Ecken $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$)

Präsenzaufgabe 4 (*Flächenstück mit vorgegebenen Parameterlinien*)
Gegeben seien zwei parametrisierte Kurven $c_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^3$, $c_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine nichtleere Menge U und ein parametrisiertes Flächenstück $x : U \to \mathbb{R}^3$, sodass alle u^1-Parameterlinien von x durch eine euklidische Bewegung in c_1 überführt werden können und alle u^2-Parameterlinien von x durch eine euklidische Bewegung in c_2 überführt werden können.

Keine Abgabe. Die Aufgaben werden am 25.11.2019 in der Übung besprochen.