Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Präsenzblatt 8 für die Übung am 09.12.2019 (nicht schriftlich abgeben!)

Präsenzaufgabe 1 (*Erste Fundamentalgrößen*)
Bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen der folgenden parametrisierten Flächenstücke:

a) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0)$

b) $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^1 + u^2, 0)$

c) $x\colon [0, 2\pi] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, 0)$

d) $x\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos u^2)\cos u^1 \\ (R + r\cos u^2)\sin u^1 \\ r\sin u^2 \end{pmatrix}$ (R > r > 0)

e)
$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto \frac{1}{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2}(2u^1, 2u^2, 1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)$$

Präsenzaufgabe 2 (*Flächenkurven*)
Bestimmen Sie, welche der Kurven

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, \cos t),$$

$$\bar{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t),$$

$$\hat{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t, 0),$$

$$\tilde{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\frac{t^2 - 1}{2}, t, \frac{t^2 - 1}{2}\right),$$

auf welchen der folgenden Flächen

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, u^1),$$

$$\bar{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^2, \sin u^2, u^1),$$

$$\hat{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^2 \cos u^1, \cos u^2 \sin u^1, \sin u^2),$$

$$\tilde{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, u^2 - 1)$$

liegen.

Weiter auf der nächsten Seite $\longrightarrow$

Präsenzaufgabe 3 (*Kurven im Parameterbereich*)
Gegeben sei das parametrisierte Flächenstück

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad u = (u^1, u^2) \mapsto \big(u^2 \cos(u^1) + \sin(u^1), u^2 \sin(u^1) - \cos(u^1), u^2\big)$$

und die Kurven

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cosh t, 0, \sinh t),$$
$$\tilde{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t, 1, -t).$$

Zeigen Sie, dass c und $\tilde{c}$ Flächenkurven auf x sind, und bestimmen Sie $u, \tilde{u}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sodass $c = x \circ u$ und $\tilde{c} = x \circ \tilde{u}$ gilt.