

**Differentialgeometrie  
für die Fachrichtung Geodäsie**

Winter-Semester 2019/20

**Präsenzblatt 9 für die Übung am 16.12.2019 (nicht schriftlich abgeben!)**

---

**Präsenzaufgabe 1** (*Kreiskegelmantel*)

Seien  $r, h > 0$ . Der Mantel des Kreiskegels mit Höhe  $h$  und Basisradius  $r$  hat eine Parametrisierung

$$x: [0, 2\pi] \times [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto \left( u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, \frac{h}{r} u^2 \right).$$

- Bestimmen Sie den Flächeninhalt von  $x$  in Abhängigkeit von  $h$  und  $r$ .
- Bestimmen Sie für  $r = h = 2$  die  $\pi/4$ -Trajektorie zu den  $u^1$ -Parameterlinien durch den Punkt  $x(0, 1) = (1, 0, 1)$ .

**Präsenzaufgabe 2** (*Flächengleichheit*)

Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Gegeben sind die Parametrisierungen

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^2 \cos u^1, \cos u^2 \sin u^1, \sin u^2)$$

$$\tilde{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, \sin u^1, \sin u^2).$$

Zeigen Sie, dass die Flächen  $x(U)$  und  $\tilde{x}(U)$  denselben Flächeninhalt besitzen.

**Präsenzaufgabe 3** (*Unbekannte Flächen*)

Sei  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein reguläres Flächenstück.

- Die ersten Fundamentalgrößen von  $x$  seien für alle  $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$g_{11}(u) = g_{22}(u) = \cosh(u^2)^2, \quad g_{12}(u) = g_{21}(u) = 0$$

gegeben. Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$c: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(\sqrt{3}t, t)$$

und den Flächeninhalt des Flächenstücks  $x(U)$  für den Teilbereich  $U = [-2, 2] \times [-2, 2]$ .

- Nun seien die ersten Fundamentalgrößen von  $x$  für alle  $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$g_{11}(u) = 1 + (u^1)^2, \quad g_{12}(u) = g_{21}(u) = -u^1, \quad g_{22}(u) = 1$$

gegeben. Bestimmen Sie an jeder Stelle den Schnittwinkel zwischen den  $u^1$ -Parameterlinien und den  $u^2$ -Parameterlinien, sowie den Schnittwinkel zwischen den Parameterlinien und der Kurve

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(t, t^2/2).$$

---

**Keine Abgabe.** Die Aufgaben werden am 16.12.2019 in der Übung besprochen.