Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie
für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Präsenzblatt 12 für die Übung am 20.01.2020 (nicht schriftlich abgeben!)

Präsenzaufgabe 1 (*Hauptkrümmungen*)
Ein reguläres Flächenstück $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ hat an einer Stelle $u_0 \in \mathbb{R}^2$ die Fundamentalgrößen

$$(g_{ij}(u_0)) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}(u_0)) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen, mittlere Krümmung und Gaußkrümmung von x im Punkt $x(u_0)$
   - indem Sie ein Extremwertproblem mit Nebenbedingungen lösen, um die Hauptkrümmungsrichtungen zu bestimmen,
   - indem Sie zunächst die Gaußkrümmung und mittlere Krümmung direkt bestimmen.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $x_{u^1}(u_0)$ und $x_{u^2}(u_0)$ die Hauptkrümmungsrichtungen von x in $x(u_0)$.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $x_{u^1}(u_0)$ und $x_{u^2}(u_0)$ diejenigen Tangentialvektoren an x in $x(u_0)$, in deren Richtung die Normalkrümmung von x gleich -1 ist.

Präsenzaufgabe 2 (*Flächenpunkte*)
Seien $u_1, \ldots, u_6 \in \mathbb{R}^2$. Für die zweiten Fundamentalgrößen (b_{ij}) eines regulären Flächenstücks $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$(b_{ij})(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij})(u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij})(u_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(b_{ij})(u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij})(u_5) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij})(u_6) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für $k = 1, \ldots, 6$ jeweils, ob $x(u_k)$ elliptisch, hyperbolisch, parabolisch, oder Flachpunkt von x ist. Welche der $x(u_k)$ können bzw. müssen Nabelpunkte von x sein?

Präsenzaufgabe 3 (*Flächen konstanter Normalkrümmung*)
Sei $x \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück, und sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass die Normalkrümmung von x an jedem Punkt in jede Richtung gleich λ ist. Zeigen Sie, dass x ein Stück einer Sphäre parametrisiert.

Keine Abgabe. Die Aufgaben werden am 20.01.2020 in der Übung besprochen.