Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie
für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Präsenzblatt 13 für die Übung am 27.01.2020 (nicht schriftlich abgeben!)

Präsenzaufgabe 1 (*Christoffelsymbole und geodätische Differentialgleichungen*)

a) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k der Fläche

$$x\colon (0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1,u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, u^2)$$

durch Koeffizientenvergleich in den Gleichungen $x_{u^iu^j} = \Gamma_{ij}^1 x_{u^1} + \Gamma_{ij}^2 x_{u^2} + b_{ij}n$.

b) Bestimmen Sie die proportional zur Bogenlänge parametrisierten Geodätischen der Fläche

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1,u^2) \mapsto (u^1, u^2 - (u^1)^2, 0)$$

durch Lösung der geodätischen Differentialgleichungen $\ddot{u}^k + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$.

Präsenzaufgabe 2 (*Geodätische auf dem Zylinder*)
Gegeben sei der Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$, sowie die Punkte $P_0 = (1,0,0)$ und $P_1 = (0,1,2)$.

a) Bestimmen Sie alle proportional zur Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $c\colon [0,1] \to Z$ mit $c(0) = P_0$ und $c(1) = P_1$.

b) Bestimmen Sie den räumlichen Abstand zwischen P_0 und P_1.

c) Bestimmen Sie den Abstand von P_0 zu P_1 auf Z, d.h. die Länge der kürzesten Kurve von P_0 nach P_1, die in Z verläuft.

Präsenzaufgabe 3 (*Geodätische auf der Einheitssphäre*)
Sei $S^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, sei $c : [a,b] \to S^2$ eine reguläre Flächenkurve auf S^2. Zeigen Sie:

a) Wenn c auf einem Großkreis von S^2 verläuft, so ist c eine Geodätische von S^2.

b) Wenn c eine Geodätische von S^2 ist, so verläuft c auf einem Großkreis von S^2.

Keine Abgabe. Die Aufgaben werden am 27.01.2020 in der Übung besprochen.