

Aufgabe 1. Skalarprodukt und Vektorprodukt. (4 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

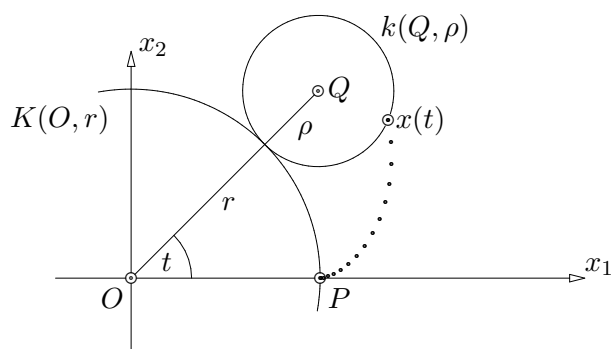
- Für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\langle z, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch für den Fall dass $z \perp x$ und $z \perp y$.
- Es gilt $|x| = |y|$ genau dann, wenn $(x + y) \perp (x - y)$. Geben Sie eine geometrische Veranschaulichung dieser Aussage an.
- $|x \times y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2$
- $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$
- x und y sind genau dann linear abhängig, wenn $x \times y = 0$. Begründen Sie, warum im Falle $z \perp x$ und $z \perp y$ die Vektoren z und $x \times y$ linear abhängig sind.

Aufgabe 2. Ebene und Gerade. (4 Punkte)

Gegeben seien die Ebene $E := \{(2 + s + 4t, -3s - 2t, 1 + 2s + t) : s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, und die Gerade $g := \{(-r, -r, 2 + 2r) : r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

- Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene E .
- Berechnen Sie den Sinus des Winkels zwischen der Geraden g und der Ebene E .
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes P mit Ortsvektor $(-1, 3, 1)$ zur Ebene E .

Aufgabe 3. Kurve einer Rollbewegung. (4 Punkte)



Auf einem Kreis $K(O, r)$ rollt – wie in der obigen Skizze veranschaulicht – außen ein kleinerer Kreis $k(Q, \rho)$ ab.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ für diejenige Kurve, welche der auf k liegende Punkt P bei dem Rollvorgang beschreibt. Ausgangslage sei dabei $x(0) = (r, 0)$, und t der vom Ursprung O aus gemessene Winkel zwischen der x_1 -Achse und dem Mittelpunkt des rollenden Kreises.

Abgabe der Lösungen bis **Mittwoch**, den 29.4.2009 um 9:30 h in den Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder direkt in der Übung.