Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie — **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 2 — **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1. Parametrisierung nach Bogenlänge. **(4 Punkte)**

Geben Sie für folgende Kurven $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ die Bogenlänge $s(t) := \int_a^t |x'(u)|\, du$ an, und parametrisieren Sie die Kurven nach Bogenlänge:

(a) $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(1 + \cos t, \sin t, \cosh t\big)$

(b) $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(t, \frac{4}{3} t^{3/2}, t^2\big)$

Aufgabe 2. Zykloide. **(4 Punkte)**

Rollt ein Kreis K vom Radius $r > 0$ auf einer Geraden, so beschreibt ein fester Punkt auf K eine ebene Kurve, die *Zykloide* genannt wird.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$ für eine solche Zykloide und berechnen Sie ihre Länge.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Formeln den Tangenteneinheitsvektor und die Krümmung in jedem Punkt der Kurve.

Hinweis: Verwenden Sie als Gerade die x_1-Achse, einen in der (x_1, x_2)-Ebene liegenden Kreis und als Startpunkt den Ursprung. Außerdem gilt die Formel $1 - \cos u = 2 \sin^2(u/2)$.

Aufgabe 3. Kettenlinie. **(4 Punkte)**

Befestigt man an zwei Punkten ein (ideales) Seil, so wird die Gleichgewichtslage dieses Seils durch die *Kettenlinie* beschrieben (dies wurde 1690 von Johann Bernoulli entdeckt). Eine mögliche Parametrisierung der Kettenlinie lautet

$$x : [-10, 10] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, \cosh t, 0)\,.$$

Bestimmen Sie die Evolvente von x bezüglich des Referenzpunktes $x(0)$, und skizzieren Sie sowohl die Kurve x als auch ihre Evolvente.

Aufgabe 4. Traktrix. **(4 Punkte)**

Wir betrachten die ebene Kurve $x : (0, 10) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \big(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0\big)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kurve regulär ist und berechnen Sie ihre geodätische Krümmung.

(b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Evolute von x an.

Abgabe der Lösungen bis **Mittwoch**, den 6.5.2009 um 9:30 h in den Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder direkt in der Übung.