Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 3 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1. Hyperbolische Schraubenlinie. **(4 Punkte)**

Die Kurve

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cosh t, \sinh t, t)$$

heißt *hyperblische Schraubenlinie.*

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve x sowie deren Krümmung $\kappa(s)$ und Torsion $\tau(s)$ als Funktion des Bogenlängenparameters s.

(b) Zeigen Sie, dass die Kurve

$$y : [1, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \ln t, \frac{1}{\sqrt{2}t}\right)$$

durch eine (geeignete) euklidische Bewegung auf die hyperbolische Schraubenlinie x abgebildet werden kann.

Aufgabe 2. Graph einer Funktion. **(4 Punkte)**

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Der Graph von f ist eine ebene Kurve, die parametrisiert werden kann durch

$$x : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, f(t))\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Evolute von x an.

(b) Berechnen Sie die geodätische Krümmung im Falle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \cosh t$.

(c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $g(t) := t^3 - t$ gegebene Funktion. Berechnen Sie die geodätische Krümmung des Graphen von g.

Aufgabe 3. Sattelfläche. **(4 Punkte)**

Wir betrachten das parametrisierte Flächenstück

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ u = (u^1, u^2) \mapsto \big(u^1 - u^2, u^1 + u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2\big)\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Fläche und bestimmen Sie den Rang der Jacobi-Matrix $J_x(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Parameterlinien und überprüfen Sie, ob die Parameterlinien ebene Kurven sind.

(c) Berechnen Sie die Krümmung der Parameterlinien und geben Sie die Punkte mit maximaler und minimaler Krümmung an.

Abgabe der Lösungen bis **Mittwoch**, den 13.5.2009 um 9:30 h in den Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder direkt in der Übung.