Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Lösung zu Übungsblatt 4 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 2. Drehflächen.

Eine *Drehfläche* entsteht, indem man eine ebene Kurve um eine Achse dreht. Im Folgenden betrachten wir eine differenzierbare Kurve

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto c(t) := (0, c_2(t), c_3(t)),$$

in der (x_2, x_3)-Ebene und drehen diese um die x_3-Achse. Die hierdurch konstruierte Fläche besitzt dann eine Parametrisierung der Form

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (\varphi, t) \mapsto x(\varphi, t) = (-c_2(t)\sin\varphi, c_2(t)\cos\varphi, c_3(t))\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Parametrisierung regulär ist, falls die Kurve c regulär ist und $c_2(t) > 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Lösung: Zunächst halten wir fest, dass die Abbildung x differenzierbar ist, da alle Komponenten differenzierbare Funktionen sind.

Um Regularität nachzuweisen, benötigen wir die partiellen Ableitungen

$$x_\varphi(\varphi, t) = (-c_2(t)\cos\varphi, -c_2(t)\sin\varphi, 0),$$

$$x_t(\varphi, t) = (-c_2'(t)\sin\varphi, c_2'(t)\cos\varphi, c_3'(t)).$$

Weiter wissen wir, dass die Kurve c regulär ist, also $0 \neq |c'(t)|^2 = (c_2'(t))^2 + (c_3'(t))^2$. Hieraus folgt insbesondere $c_2'(t) \neq 0$ oder $c_3'(t) \neq 0$.

Im Fall $c_3'(t) \neq 0$ sind die Vektoren $x_\varphi(\varphi, t)$ und $x_t(\varphi, t)$ linear unabhängig und die Parametrisierung ist somit in dem Punkt $x(\varphi, t)$ regulär.

Falls $c_3'(t) = 0$ gilt, folgt aber (s.o.) $c_2'(t) \neq 0$. Wir berechnen in diesem Fall

$$x_\varphi(\varphi, t) \times x_t(\varphi, t) = (*, *, -c_2(t)c_2'(t)\cos^2\varphi - c_2(t)c_2'(t)\sin^2\varphi) = (*, *, -c_2(t)c_2'(t)).$$

Da $c_2(t) > 0$ und $c_2'(t) \neq 0$, ist die dritte Komponente von $x_\varphi(\varphi, t) \times x_t(\varphi, t)$ ungleich Null und wir folgern $x_\varphi(\varphi, t) \times x_t(\varphi, t) \neq 0$. Die Parametrisierung ist also auch in diesem Fall regulär.