Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

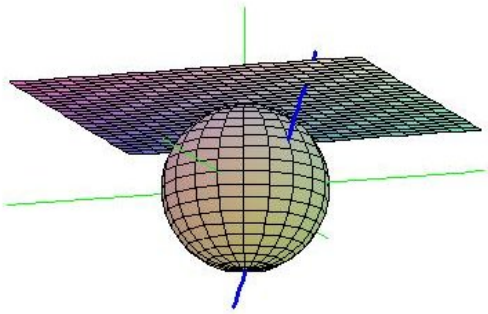
**Differentialgeometrie** **Fachrichtung Geodäsie**

**Übungsblatt 5** **Sommersemester 2009**

---

**Aufgabe 1. Stereographische Projektion.** **(4 Punkte)**

Die *stereographische Projektion* ordnet jedem Punkt $p$ der durch die Gleichung $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ definierten Einheitssphäre ohne den Südpol $(0,0,-1)$ genau einen Punkt $\pi(p)$ in der Ebene $E=\{(u^1,u^2,1)\in\mathbb{R}^3 : u^1,u^2\in\mathbb{R}\}$ zu: $\pi(p)$ ist der Schnittpunkt der Geraden durch $p$ und den Südpol mit $E$.



Insbesondere erhält man dadurch eine Parametrisierung $x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (u^1,u^2)\mapsto x(u^1,u^2)$ der Einheitssphäre ohne den Südpol, indem den Parametern $(u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt der Geraden durch $(u^1,u^2,1)$ und den Südpol mit der Einheitssphäre zugeordnet wird.

Geben Sie diese Parametrisierung explizit an und zeigen Sie, dass

$$x : U=\{(u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2 : (u^1)^2+(u^2)^2<4\}\to\mathbb{R}^3,\ (u^1,u^2)\mapsto x(u^1,u^2)$$

eine Umparametrisierung der durch

$$\tilde{x} : \tilde{U}=\{(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)\in\mathbb{R}^2 : (\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2<1\}\to\mathbb{R}^3,\ (\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)\mapsto\tilde{x}\big(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2,\sqrt{1-(\tilde{u}^1)^2-(\tilde{u}^2)^2}\big)$$

gegebenen oberen Halbsphäre ist.

**Aufgabe 2. Rotationsparaboloid.** **(4 Punkte)**

(a) Begründen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{F}:=\big\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_3=x_1^2+x_2^2\big\}\subset\mathbb{R}^3$$

die Spur eines regulär parametrisierten Flächenstücks ist und skizzieren Sie die Fläche.

(b) Finden Sie eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{F}$ als Drehfläche (vgl. Aufgabe 2 des letzten Übungsblatts) und geben Sie die zugehörigen Parameterlinien an. Interpretieren Sie die Parameterlinien geometrisch.

(c) Berechnen Sie in jedem Punkt einen Normaleneinheitsvektor von $\mathcal{F}$.

---

**Abgabe** der Lösungen bis **Mittwoch**, den 27.5.2009 um 9:30 h in den Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder direkt in der Übung.