Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

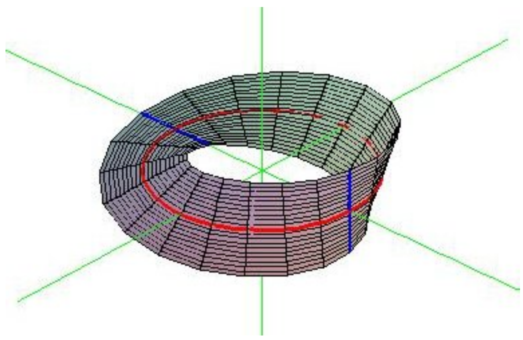
Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 6 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1. Möbiusband. **(4 Punkte)**

Gegeben sei die als *Möbiusband* bekannte Regelfläche mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) &\to \mathbb{R}^3, \\ (u^1, u^2) &\mapsto (\cos u^1 + u^2 \sin \frac{u^1}{2} \cos u^1, \sin u^1 + u^2 \sin \frac{u^1}{2} \sin u^1, u^2 \cos \frac{u^1}{2}) . \end{aligned}$$



(a) Berechnen Sie in jedem Punkt einen (nicht notwendigerweise normierten) Normalenvektor der Fläche.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $u^1 \in \mathbb{R}$ gilt:
$x(u^1 + 2\pi, 0) = x(u^1, 0)$ und $N(u^1 + 2\pi, 0) = -N(u^1, 0)$.

Aufgabe 2. Erste Fundamentalform einiger Flächen. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie für die folgenden Flächen alle regulären Punkte und berechnen Sie in diesen die ersten Fundamentalgrößen.

(a) *Ebene in Polarkoordinaten:*

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, 0)$$

(b) *Verallgemeinerter Kegel* mit Leitkurve $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \ell(t) = (\sin t, \sin(2t), 1)$:

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto u^2 \ell(u^1)$$

(c) *Tangentenfläche* einer Helix $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto c(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$:

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto c(u^1) + u^2 \dot{c}(u^1)$$

Aufgabe 3. Erste Fundamentalform von Drehflächen. **(4 Punkte)**

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t) := (0, c_2(t), c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_2(t) > 0$, und

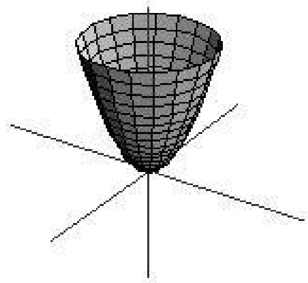
$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (-c_2(u^2) \sin u^1, c_2(u^2) \cos u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche, die durch Drehung der Kurve c um die x_3-Achse entsteht (vgl. Aufgabe 2 auf Übungsblatt 4).

(a) Bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen der Drehfläche x.

(b) Berechnen Sie hiermit die ersten Fundamentalgrößen des Rotationsparaboloids

$$x : [0, 2\pi] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (-u^2 \sin u^1, u^2 \cos u^1, (u^2)^2).$$



Aufgabe 4. Satz von Pappus. **(4 Punkte)**

Nun sei $c : (0, L) \to \mathbb{R}^3$, $c(s) := (0, c_2(s), c_3(s))$ eine reguläre, *nach Bogenlänge parametrisierte* Kurve mit $c_2(s) > 0$, und

$$x : [0, 2\pi] \times (0, L) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (-c_2(u^2) \sin u^1, c_2(u^2) \cos u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche $\mathcal{F}$, die entsteht, wenn die Kurve c um die x_3-Achse gedreht wird.

(a) Für $s \in (0, L)$ sei $\rho(s)$ der Abstand von $c(s)$ zur x_3-Achse. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = 2\pi \int_0^L \rho(s)\, ds.$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rotationstorus' $(0 < r < a)$

$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (-(a + r \cos u^1) \sin u^2, (a + r \cos u^1) \cos u^2, r \sin u^1).$$

Abgabe der Lösungen bis **Mittwoch**, den 17.6.2009 um 9:30 h in den Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder direkt in der Übung.

Aktueller Hinweis: Am Mittwoch, den **10.6.2009** wird anstelle der Übung die **Evaluation** der Vorlesung und Übung stattfinden. Außerdem haben Sie an diesem Termin die Gelegenheit, Fragen zur gesamten bisherigen Vorlesung und zu den Übungsaufgaben zu stellen.