Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 7 **Sommersemester 2009**

Aufgabe 1. Flächeninhalte. **(4 Punkte)**

Berechnen Sie für $T > 0$ den Flächeninhalt folgender Flächenstücke.

(a) Kegelstück
$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(b) Elliptisches Paraboloid der Höhe T
$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(c) Teil der Sattelfläche
$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 x_2,\ 0 < x_3 < T\}$$

Aufgabe 2. Zweite Fundamentalform von Drehflächen. **(4 Punkte)**

(a) Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto c(s) := (0, c_2(s), c_3(s))$ eine reguläre, *nach Bogenlänge parametrisierte Kurve* mit $c_2(s) > 0$. Bestimmen Sie die zweiten Fundamentalgrößen der Drehfläche
$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (-c_2(u^2)\sin u^1, c_2(u^2)\cos u^1, c_3(u^2)).$$

(b) Parametrisieren Sie die Sphäre vom Radius $r > 0$ als Drehfläche und berechnen Sie ihre zweite Fundamentalform. Geben Sie außerdem ihre Normalkrümmung in jedem Punkt an.

Aufgabe 3. Hauptkrümmungen des Rotationstorus'. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen (maximale und minimale Normalkrümmung) des Rotationstorus' $(0 < r < a)$
$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (-(a + r\cos u^1)\sin u^2, (a + r\cos u^1)\cos u^2, r\sin u^1).$$

Hinweis: Parametrisieren Sie den Rotationstorus zunächst als Drehfläche einer *nach Bogenlänge* parametrisierten Kurve c und verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2 sowie Lagrange-Multiplikatoren.

Abgabe der Lösungen bis **Mittwoch**, den 24.6.2009 um 9:30 h in den Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder direkt in der Übung.