

Aufgabe 1. Normalkrümmung. (4 Punkte)

Gegeben sei die Fläche \mathcal{F} mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cosh u^1, u^2 \sinh u^1, u^1 + u^2).$$

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen und die Gaußkrümmung der Fläche im Punkt $x(0, 0)$.

Aufgabe 2. Wendelfläche. (4 Punkte)

Skizzieren Sie für $a > 0$ die Wendelfläche \mathcal{F} mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1),$$

und bestimmen Sie die Hauptkrümmungen sowie die Krümmungslinien der Wendelfläche.

Aufgabe 3. Asymptotenrichtungen. (4 Punkte)

Wir betrachten die Fläche \mathcal{F} mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cosh u^1, u^2 \sinh u^1, u^1).$$

- Berechnen Sie die Gaußkrümmung κ der Fläche \mathcal{F} in jedem Punkt.
- Bestimmen Sie diejenigen Punkte $x(u^1, u^2)$, für die $\kappa(x(u^1, u^2)) = -1$ gilt und geben Sie in diesen Punkten die Asymptotenrichtungen an.
- Berechnen Sie die Asymptotenlinien der Fläche \mathcal{F} .

Zusatzaufgabe. Asymptotenlinien. (4 Punkte)

- Zeigen Sie, dass das elliptische Paraboloid

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$$

keine Asymptotenlinien besitzt.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialgleichung (DA) die Asymptotenlinien des hyperbolischen Paraboloids

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 - x_2^2\}.$$