

Aufgabe 1. Zylinder.

(4 Punkte)

Wir betrachten den Zylinder mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, \sin u^1, u^2).$$

- Bestimmen Sie die Christoffelsymbole des Zylinders.
- Geben Sie die Differentialgleichungen für Geodätische auf dem Zylinder an.
- Berechnen Sie alle Geodätische durch den Punkt $x(0, 0) = (1, 0, 0)$.
- Berechnen Sie für jede Geodätische $c : \mathbb{R} \rightarrow x(\mathbb{R}^2)$ mit $c(0) = x(0, 0) = (1, 0, 0)$ die Funktion $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$, die jedem $t \in \mathbb{R}$ den Winkel $\theta(t)$ von c mit dem Breitenkreis durch den Punkt $c(t)$ zuordnet.

Aufgabe 2. Christoffelsymbole von Graphen.

(4 Punkte)

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Bestimmen Sie die Christoffelsymbole der parametrisierten Fläche

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, f(u^1, u^2)).$$

Aufgabe 3. Einheitssphäre und Loxodrome.

(4 Punkte)

Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R} \times [0, \pi], (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \sin u^2, \cos u^2)$$

und das Bild der Kurve $u^1(s) = \log \cot((\pi - \sqrt{2}s)/4)$, $u^2(s) = (\pi - \sqrt{2}s)/2$, $0 \leq s \leq \pi/\sqrt{2}$. Diese Flächenkurve $c(s) = x(u^1(s), u^2(s))$ ist die mit Bogenlänge parametrisierte *Loxodrome*, die in jedem Punkt die Breiten- und Längenkreise in einem Winkel von 45° schneidet.

- Berechnen Sie zunächst die geodätische Krümmung der Breitenkreise.
- Begründen Sie, warum die Loxodrome keine Geodätische sein kann.
- Berechnen Sie die geodätische Krümmung der Loxodrome in jedem Kurvenpunkt.

Klausurtermin: Montag, 5. Oktober 2009, 9:00 Uhr – 11:00 Uhr, Jordan-Hörsaal.
Bitte melden Sie sich rechtzeitig (in den Semesterferien) im Sekretariat bei Frau Vacchiani, Zimmer 4A-14 im Allianz-Gebäude (05.20) an.

Weitere Informationen finden Sie auf der Vorlesungs-Homepage

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/difgeodaesie2009s/>

Abgabe der Lösungen bis **Mittwoch**, den 15.7.2009 um 9:30 h in den Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder direkt in der Übung.