Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 1 **Wintersemester 2010/11**

Aufgabe 1. Skalarprodukt und Vektorprodukt. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

(a) Für beliebige λ, $\mu \in \mathbb{R}$ gilt $\langle z, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch für den Fall dass $z \perp x$ und $z \perp y$.

(b) Es gilt $|x| = |y|$ genau dann, wenn $(x + y) \perp (x - y)$. Geben Sie eine geometrische Veranschaulichung dieser Aussage an.

(c) $|x \times y|^2 = |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2$

(d) $\langle x, y \times z \rangle = \langle y, z \times x \rangle$

(e) x und y sind genau dann linear abhängig, wenn $x \times y = 0$. Begründen Sie, warum im Falle $z \perp x$ und $z \perp y$ die Vektoren z und $x \times y$ linear abhängig sind.

Aufgabe 2. Gerade und Ebene. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die Punkte $A(0, 1, 0)$, $B(1, -1, 1)$, $C(1, 0, 0)$ und $D(2, 0, -1)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Geraden AB und CD sich schneiden und bestimmen Sie den Schnittpunkt S.

(b) Geben Sie die Ebene E an, die die vier Punkte enthält und bestimmen Sie die Lotgerade auf E im Punkt S.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E und berechnen Sie den Abstand des Nullpunktes von E.

(d) Geben Sie eine Parameterdarstellung einer Geraden g an, die durch S geht und mit E den Winkel 45° einschließt.

Aufgabe 3. Vektorfunktion. **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Vektorfunktion

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = \big(u^1 + u^2, u^1 - u^2, (u^1)^2 + (u^2)^2\big) \qquad (*)$$

sowie die Funktionen $u^1(t) = t^2 + 1$ und $u^2(t) = \sin t$.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_x(u)$ sowie ihren Rang in jedem Punkt $u \in \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dt} x(u^1(t), u^2(t))$$

(b1) durch Einsetzen der Funktionen $u^1(t)$ und $u^2(t)$ in die Abbildungsvorschrift $(*)$;

(b2) mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen verallgemeinerten Kettenregel.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 25.10.2010 in der Übung.