Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 2 **Wintersemester 2010/11**

Aufgabe 1. Parametrisierung nach Bogenlänge. **(4 Punkte)**

Geben Sie für folgende Kurven $x : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ die Bogenlänge $s(t) := \int_a^t |x'(u)|\,du$ an, und parametrisieren Sie die Kurven nach Bogenlänge:

(a) $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(1+\cosh t, \cos t, 1-\sin t\big)$

(b) $x : [0,2] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(\frac{1}{2}t^2, 2t, \frac{4}{3}t^{3/2}\big)$

Aufgabe 2. Kettenlinie und Traktrix. **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Kurven regulär sind und berechnen Sie jeweils ihre Länge sowie den Tangenteneinheitsvektor in jedem Punkt.

(a) *Kettenlinie:*

$$x : [-8,8] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, \cosh t, 0)\,.$$

Diese Kurve erhält man als Gleichgewichtslage eines an zwei Punkten befestigten (idealen) Seiles (dies wurde 1690 von Johann Bernoulli entdeckt).

(b) *Traktrix:*

$$x : (0,8) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \Big(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0\Big)\,.$$

Aufgabe 3. Zykloide. **(4 Punkte)**

Rollt ein Kreis K vom Radius $r > 0$ auf einer Geraden, so beschreibt ein fester Punkt auf K eine ebene Kurve, die *Zykloide* genannt wird.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $x : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$ für eine solche Zykloide, indem Sie als Gerade die x_1-Achse, einen in der (x_1,x_2)-Ebene liegenden Kreis und als Startpunkt den Ursprung wählen.

(b) Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor und die Krümmung der Zykloide in jedem Punkt der Kurve.

(c) Berechnen Sie die Länge von x.

Hinweise: Die Formel für die Krümmung in beliebigen Parametern lautet

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \times x''(t)|}{|x'(t)|^3}\,.$$

Sie können außerdem die Gleichung $1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$ verwenden.

Sollten Sie in Aufgabenteil (a) zu keinem Ergebnis gelangt sein, dürfen Sie für die Bearbeitung der Aufgabenteile (b) und (c) folgende parametrisierte Kurve verwenden:

$$x : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (1 + t - \sin t - \cos t, 1 - t + \sin t - \cos t, 0).$$

Abgabe der Lösungen bis **Donnerstag**, den 04.11.2010 in der Vorlesung.