Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 3 **Wintersemester 2010/11**

Aufgabe 1. Graph einer Funktion. **(4 Punkte)**

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Der Graph von f ist eine ebene Kurve, die parametrisiert werden kann durch

$$x : I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, f(t), 0)\,.$$

Man nennt eine solche Darstellung einer ebenen Kurve auch *explizite Kurvendarstellung.*

(a) Zeigen Sie, dass die Kurve x regulär ist und berechnen Sie ihre Krümmung und Torsion.

(b) Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cosh t,$ das Frenet-Dreibein von x.

Aufgabe 2. Ellipse. **(4 Punkte)**

Gegeben sei eine *Ellipse* mit den Halbachsen $a \geq b > 0$ und der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(a\cos t, b\sin t, 0\big)\,.$$

(a) Bestimmen Sie das Frenet-Dreibein von x.

(b) Die *Evolute* einer regulären ebenen Kurve $x : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist definiert als die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte. Sie kann parametrisiert werden durch

$$m : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto m(t) := x(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)\,. \qquad (*)$$

Berechnen Sie die Evolute der Ellipse und bestimmen Sie diejenigen Punkte, in denen die Evolute nicht regulär ist.

Aufgabe 3. Integration der Frenet-Formeln. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Frenet-Formeln diejenige nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big),$$

die konstante Torsion $\tau = 0$ sowie konstante Krümmung $\kappa > 0$ hat und zum Zeitpunkt $s = 0$ die Anfangsbedingungen

$$x(0) = (\frac{1}{\kappa}, 0, 0),\ \ T(0) = (0, 1, 0) \quad \text{und} \ \ N(0) = (-1, 0, 0)$$

erfüllt. Skizzieren Sie diese Kurve.

Hinweis: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so besitzt die Differentialgleichung $f'' = -\kappa^2 f$ die allgemeine Lösung $f(t) = a\cos(\kappa t) + b\sin(\kappa t)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 08.11.2010 in der Übung.