Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 4 **Wintersemester 2010/11**

Aufgabe 1. Hyperbolische Schraubenlinie. **(4 Punkte)**

Die Kurve

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cosh t, \sinh t, t)$$

heißt *hyperbolische Schraubenlinie.*

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve x sowie deren Krümmung $\kappa(s)$ und Torsion $\tau(s)$ als Funktion des Bogenlängenparameters s.

(b) Zeigen Sie, dass die Kurve

$$y : [1, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \ln t, \frac{1}{\sqrt{2}t}\right)$$

durch eine (geeignete) euklidische Bewegung auf die hyperbolische Schraubenlinie x abgebildet werden kann.

Aufgabe 2. Kettenlinie und Traktrix. **(4 Punkte)**

Die *Evolvente* einer regulären ebenen Kurve $x : I \to \mathbb{R}^3$ bezüglich des Referenzpunktes $x(t_0)$, $t_0 \in I$, ist die durch

$$e_{t_0} : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto e_{t_0}(t) := x(t) - s_{t_0}(t) \cdot T(t)$$

parametrisierte Kurve. Dabei sei $s_{t_0}(t) := \int_{t_0}^{t} |x'(u)| du$ die Bogenlängenfunktion.

(a) Bestimmen Sie die Evolvente e_0 der durch $x : [-8, 8] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, \cosh t, 0)$ parametrisierten Kettenlinie bezüglich des Referenzpunktes $x(0)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel $(*)$ des letzten Übungsblattes die Evolute m der Traktrix

$$x : (0, 8) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0\right).$$

Aufgabe 3. Sattelfläche. **(4 Punkte)**

Wir betrachten das parametrisierte Flächenstück

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ u = (u^1, u^2) \mapsto \left(u^1 - u^2, u^1 + u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2\right).$$

(a) Skizzieren Sie die Fläche und bestimmen Sie den Rang der Jacobi-Matrix $J_x(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Parameterlinien und überprüfen Sie, ob die Parameterlinien ebene Kurven sind.

(c) Berechnen Sie die Krümmung der Parameterlinien und geben Sie die Punkte mit maximaler und minimaler Krümmung an.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 15.11.2010 in der Übung.