

Aufgabe 1. Elliptisches Paraboloid.

(4 Punkte)

Gegeben sei das *elliptische Paraboloid* mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, (u^2)^2).$$

- (a) Bestimmen Sie den Rang der Jacobimatrix in jedem Punkt der Fläche.
- (b) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion aller Parameterlinien.
- (c) Zeigen Sie, dass je zwei u^2 -Parameterlinien durch eine euklidische Bewegung ineinander übergeführt werden können. Gilt dies auch für die u^1 -Parameterlinien?

Aufgabe 2. Loxodrome.

(4 Punkte)

Wir betrachten die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\sin u^2 \cos u^1, \sin u^2 \sin u^1, \cos u^2)$$

und darauf eine *Loxodrome*, die gegeben ist durch

$$c : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto x(u^1(t), u^2(t)) \quad \text{mit} \quad u^1(t) = \log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right), \quad u^2(t) = \frac{\pi}{2} - t.$$

- (a) Berechnen Sie die Länge dieser Flächenkurve.
- (b) Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Raumkurven ist definiert als der Winkel zwischen den beiden Tangenten im Schnittpunkt. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Kurve c und den Breitenkreisen $u^2 = \text{const.}$

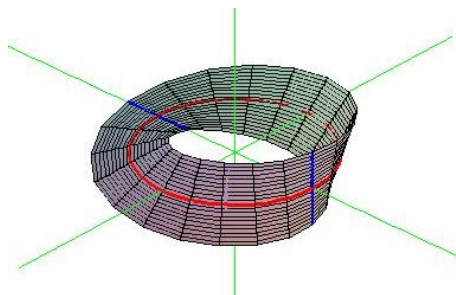
Aufgabe 3. Möbiusband.

(freiwillig)

Gegeben sei die als *Möbiusband* bekannte Fläche mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u^1, u^2) \mapsto \left(\cos u^1 + u^2 \sin \frac{u^1}{2} \cos u^1, \sin u^1 + u^2 \sin \frac{u^1}{2} \sin u^1, u^2 \cos \frac{u^1}{2}\right).$$



- (a) Berechnen Sie in jedem Punkt der Fläche den Vektor $n := x_{u^1} \times x_{u^2}$.
- (b) Zeigen Sie, dass $x(u^1 + 2\pi, 0) = x(u^1, 0)$ und $n(u^1 + 2\pi, 0) = -n(u^1, 0) \quad \forall u^1 \in \mathbb{R}$.