Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 8 **Wintersemester 2010/11**

Aufgabe 1. Erste Fundamentalform verschiedener Flächen. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie für die folgenden Flächen alle regulären Punkte und berechnen Sie in diesen die ersten Fundamentalgrößen.

(a) *Ebene in Polarkoordinaten:*

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, 0)$$

(b) *Verallgemeinerter Kegel* mit Leitkurve $\ell : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \ell(t) = (\sin(2t), \sin t, 1)$:

$$x : [0, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto u^2 \ell(u^1)$$

(c) *Tangentenfläche* einer Helix $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto c(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$:

$$x : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto c(u^1) + u^2 \dot{c}(u^1)$$

Aufgabe 2. Drehflächen. **(4 Punkte)**

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t) := (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_1(t) > 0$, und

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche, die durch Drehung der Kurve c um die x_3-Achse entsteht (vgl. Aufgabe 2 auf Übungsblatt 6).

(a) Bestimmen Sie die ersten Fundamentalgrößen der Drehfläche x.

(b) Berechnen Sie hiermit die ersten Fundamentalgrößen des Rotationstorus' $(0 < r < a)$

$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 (a + r \cos u^2), \sin u^1 (a + r \cos u^2), r \sin u^2).$$

Aufgabe 3. Satz von Pappus. **(4 Punkte)**

Nun sei $c : (0, L) \to \mathbb{R}^3$, $c(s) := (c_1(s), 0, c_3(s))$ eine reguläre, *nach Bogenlänge parametrisierte* Kurve mit $c_1(s) > 0$, und

$$x : [0, 2\pi] \times (0, L) \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2))$$

eine Parametrisierung der Drehfläche $\mathcal{F}$, die entsteht, wenn die Kurve c um die x_3-Achse gedreht wird.

(a) Für $s \in (0, L)$ sei $\rho(s)$ der Abstand von $c(s)$ zur x_3-Achse. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = 2\pi \int_0^L \rho(s) \, ds.$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rotationstorus' $(0 < r < a)$

$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 (a + r \cos u^2), \sin u^1 (a + r \cos u^2), r \sin u^2).$$

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 13.12.2010 in der Übung.