Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 9 **Wintersemester 2010/11**

Aufgabe 1. Flächeninhalte. **(4 Punkte)**

Berechnen Sie für $T > 0$ den Flächeninhalt folgender Flächenstücke.

(a) Kegelstück
$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(b) Elliptisches Paraboloid der Höhe T
$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ 0 < x_3 < T\}$$

(c) Teil der Sattelfläche
$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 x_2,\ x_1^2 + x_2^2 < T\}$$

Aufgabe 2. Zweite Fundamentalform von Drehflächen. **(4 Punkte)**

(a) Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t) := (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_1(t) > 0$. Bestimmen Sie die zweiten Fundamentalgrößen der Drehfläche
$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2)).$$

(b) Parametrisieren Sie die Sphäre vom Radius $r > 0$ als Drehfläche und berechnen Sie ihre zweite Fundamentalform. Geben Sie außerdem ihre Normalkrümmung in jedem Punkt an.

Aufgabe 3. Rotationstorus. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen des Rotationstorus' $(0 < r < a)$
$$x : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto \left((a + r\cos u^2)\cos u^1, (a + r\cos u^2)\sin u^1, r\sin u^2\right),$$
indem Sie wie in der Vorlesung ein Extremwertproblem mit Nebenbedingung lösen.

Hinweis: Lassen Sie bei der Rechnung zunächst die ersten und zweiten Fundamentalgrößen als Variable stehen.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 20.12.2010 in der Übung.