Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 14 **Wintersemester 2010/11**

Aufgabe 1. Zylinder. **(4 Punkte)**

Wir betrachten den Zylinder mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, \sin u^1, u^2).$$

(a) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole des Zylinders.

(b) Geben Sie die Differentialgleichungen für Geodätische auf dem Zylinder an.

(c) Bestimmen Sie alle Geodätische durch den Punkt $x(0,0) = (1,0,0)$.

(d) Berechnen Sie für jede Geodätische $c : \mathbb{R} \to x(\mathbb{R}^2)$ mit $c(0) = x(0,0) = (1,0,0)$ die Funktion $\theta : \mathbb{R} \to [0,\pi]$, die jedem $t \in \mathbb{R}$ den Winkel $\theta(t)$ von c mit dem Breitenkreis durch den Punkt $c(t)$ zuordnet.

Aufgabe 2. Loxodrome. **(4 Punkte)**

Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$x : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \sin u^2, \cos u^2)$$

und das Bild der Kurve $u^1(s) = \ln\cot\left(\frac{\pi - \sqrt{2}s}{4}\right),\ u^2(s) = \frac{\pi - \sqrt{2}s}{2}, \quad 0 \le s \le \frac{\pi}{2}.$

Aus Aufgabe 2 von Blatt 5 wissen Sie, dass diese Kurve *Loxodrome* heißt und alle Breitenkreise, d.h. u^1- Parameterlinien in einem Winkel von $\pi/4$ ($= 45°$) schneidet.

(a) Berechnen Sie zunächst die geodätische Krümmung der Breitenkreise von x.

(b) Begründen Sie, weshalb die Loxodrome keine Geodätische sein kann.

(c) Berechnen Sie die geodätische Krümmung der Loxodrome in jedem Kurvenpunkt.

Aufgabe 3. Clairaut Relation. **(4 Punkte)**

(a) Wir betrachten das Rotationshyperboloid mit der Parametrisierung

$$x : [0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \cosh u^2, \sin u^1 \cosh u^2, \sinh u^2).$$

Zeigen Sie, dass die Geodätische durch den Punkt $(\sqrt{2}, 0, 1)$, die mit dem Breitenkreis einen Winkel von $\pi/4$ ($= 45°$) bildet, die (x_1, x_2)-Ebene nicht schneiden kann.

(b) Gegeben sei nun die Pseudosphäre mit der Parametrisierung

$$x : [0,2\pi) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto \left(\frac{\cos u^1}{\cosh u^2}, \frac{\sin u^1}{\cosh u^2}, u^2 - \tanh u^2\right),$$

sowie die Geodätische c durch den Punkt $(1,0,0)$, die mit dem Breitenkreis $u^2 = 0$ einen Winkel von $\pi/3$ ($= 60°$) bildet. Geben Sie alle Breitenkreise an, die von c geschnitten werden.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 07.02.2011 in der Übung.