Zur Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sind 2 db. Funktionen $u, v: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch eine DGL der Form

$$f(u,v)\dot{u} + g(u,v)\dot{v} = 0$$

(oder auch $f(u,v)(\dot{u})^2 + g(u,v)(\dot{v})^2 = 0$), so versucht man, alle Ausdrücke mit u und $\dot{u}$ auf die linke, alle Ausdrücke mit $v, \dot{v}$ auf die rechte Seite zu bringen (im Allgemeinen geht das nicht immer, aber in unseren Beispielen schon). Dann schreibt man formal $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ (nachdem man evtl. die Wurzel gezogen hat), und multipliziert mit dt. Integration liefert dann eine Lösung der DGL!

__Beispiel__

$$(\dot{u})^2 + (1-u)(\dot{v})^2 = 0 \iff$$

$$(\dot{u})^2 = (u-1)\cdot(\dot{v})^2 \overset{u \neq 1}{\iff}$$

$$\frac{(\dot{u})^2}{u-1} = \dot{v}^2 \iff \frac{\dot{u}}{\sqrt{u-1}} = \pm \dot{v}$$

Berechne also

$$\int \frac{du}{\sqrt{u-1}} = \pm \int dv \quad , \text{ d.h.}$$

$$2\sqrt{u-1} = \pm v + c \quad \text{bzw.}$$

$$v(t) = \pm 2\sqrt{u(t)-1} + c'$$