Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link 4. März 2011

Musterlösung zur Klausur
Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie

Aufgabe 1. Kurventheorie. **(6 Punkte)**

Gegeben sei die Kurve mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3} \right).$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Kurve x regulär ist, und ob x nach Bogenlänge parametrisiert ist.

b) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von x.

(c) Zeigen Sie, dass alle Tangentialvektoren von x mit der x_3-Richtung $(0, 0, 1)$ konstanten Winkel α einschließen. Berechnen Sie α.

Lösung:

(a) Da

$$x'(t) = (1 - t^2, 2t, 1 + t^2) \neq o \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \ \text{ wegen } \ 1 + t^2 \geq 1,$$

ist x regulär. Weiter haben wir

$$\begin{aligned} |x'(t)|^2 &= (1 - t^2)^2 + (2t)^2 + (1 + t^2)^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4 \\ &= 2 + 4t^2 + 2t^4 = 2(1 + t^2)^2 \geq 2, \end{aligned}$$

also ist x nicht nach Bogenlänge parametrisiert.

(b) Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} x''(t) &= (-2t, 2, 2t) = 2(-t, 1, t), \quad x'''(t) = (-2, 0, 2) = 2(-1, 0, 1), \\ x' \times x'' &= 2(2t^2 - 1 - t^2, -t - t^3 - t + t^3, 1 - t^2 + 2t^2 \\ &= 2(t^2 - 1, -2t, t^2 + 1) \\ |x' \times x''| &= 2\sqrt{(t^2 - 1)^2 + (-2t)^2 + (t^2 + 1)^2} \\ &= 2\sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2 + t^4 + 2t^2 + 1} \\ &= 2\sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2} = 2\sqrt{2}(t^2 + 1) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|x' \times x''|}{|x'|^3} = \frac{2\sqrt{2}(1 + t^2)}{2\sqrt{2}(1 + t^2)^3} = \frac{1}{(1 + t^2)^2}, \\ \tau(t) &= \frac{\langle x' \times x'', x''' \rangle}{|x' \times x''|^2} = \frac{4(-t^2 + 1 + t^2 + 1)}{4 \cdot 2(t^2 + 1)^2} = \frac{1}{(1 + t^2)^2} = \kappa(t). \end{aligned}$$

(c) Mit $\mathfrak{e}_3 = (0, 0, 1)$ haben wir

$$\cos \alpha = \frac{\langle x'(t), \mathfrak{e}_3 \rangle}{|x'(t)| \cdot |\mathfrak{e}_3|} = \frac{1 + t^2}{\sqrt{2}(1 + t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.h. α hängt nicht vom Parameter t ab. Wegen $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt weiter $\alpha = \frac{\pi}{4} (\widehat{=} 45^\circ)$.

Aufgabe 2. Kegelfläche. **(6 Punkte)**

Wir betrachten die Fläche mit der Parametrisierung

$$x : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (u^1, u^1 \cos u^2, u^1(1 + \sin u^2))\,.$$

(a) Untersuchen Sie, ob x regulär parametrisiert ist und berechnen Sie die ersten und zweiten Fundamentalgrößen von x.

(b) Zeigen Sie, dass x nur parabolische Punkte besitzt.

(c) Geben Sie alle Asymptotenlinien von x an.

(d) Zeigen Sie, dass die u^1-Parameterlinien Krümmungslinien sind.

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
x_{u^1}(u^1, u^2) &= (1, \cos u^2, 1 + \sin u^2),\\
x_{u^2}(u^1, u^2) &= (0, -u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2),\\
x_{u^1} \times x_{u^2} &= (u^1 + u^1 \sin u^2, -u^1 \cos u^2, -u^1 \sin u^2) = u^1 \cdot (1 + \sin u^2, -\cos u^2, -\sin u^2).
\end{aligned}$$

x ist regulär, da $x_{u^1} \times x_{u^2} \neq o$ für $u^1 \neq 0$ gilt.

Die ersten Fundamentalgrößen sind

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle x_{u^1}, x_{u^1} \rangle = 1 + (\cos u^2)^2 + (1 + \sin u^2)^2 = 1 + 1 + 1 + 2 \sin u^2 = 3 + 2 \sin u^2,\\
g_{12} &= \langle x_{u^1}, x_{u^2} \rangle = u^1 \cos u^2 = g_{21},\\
g_{22} &= \langle x_{u^2}, x_{u^2} \rangle = (u^1)^2,\\
g &= g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 3(u^1)^2 + 2(u^1)^2 \sin u^2 - (u^1)^2 (\cos u^2)^2\\
&= (u^1)^2 \big(2 + 2 \sin u^2 + 1 - (\cos u^2)^2\big) = (u^1)^2 \big(2 + 2 \sin u^2 + (\sin u^2)^2\big).
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$n = \frac{1}{\sqrt{g}} x_{u^1} \times x_{u^2} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \sin u^2 + (\sin u^2)^2}} (1 + \sin u^2, -\cos u^2, -\sin u^2).$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
x_{u^1 u^1}(u^1, u^2) &= (0, 0, 0),\\
x_{u^1 u^2}(u^1, u^2) &= (0, -\sin u^2, \cos u^2),\\
x_{u^2 u^2}(u^1, u^2) &= (0, -u^1 \cos u^2, -u^1 \sin u^2),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \langle x_{u^1 u^1}, n \rangle = 0,\\
b_{12} &= \langle x_{u^1 u^2}, n \rangle = 0 = b_{21},\\
b_{22} &= \langle x_{u^2 u^2}, n \rangle = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot (u^1)^2 = \frac{u^1}{\sqrt{2 + 2 \sin u^2 + (\sin u^2)^2}},\\
b &= b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 0.
\end{aligned}$$

(b) Die Gaußkrümmung ist gegeben durch

$$K = \frac{b}{g} = 0,$$

also besitzt die Fläche nur parabolische Punkte oder Flachpunkte. Für die mittlere Krümmung haben wir weiter

$$H = \frac{1}{2g}\big(b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}\big) = \frac{1}{2g}b_{22}g_{11} \neq 0 \quad \text{für} \quad u^1 \neq 0,$$

d.h. die Fläche kann nur parabolische Punkte haben.

(c) Da $b_{11} = 0$ ist, sind nach einem Satz der Vorlesung die u^1-Parameterlinien Asymptotenlinien. Da x nur parabolische Punkte hat, gibt es in jedem Punkt der Fläche genau eine Asymptotenrichtung, also gibt es außer den u^1-Parameterlinien keine weiteren Asymptotenlinien.

(d) Die Differentialgleichung (DK) für Krümmungslinien vereinfacht sich in unserem Fall zu der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (b_{21}g_{11} - b_{11}g_{21})\left(\dot{u}^1\right)^2 + (b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22})\,\dot{u}^1\dot{u}^2 + (b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22})\left(\dot{u}^2\right)^2 \\ &= b_{22}g_{11}\dot{u}^1\dot{u}^2 + b_{22}g_{12}\left(\dot{u}^2\right)^2 = (b_{22}g_{11}\dot{u}^1 + b_{22}g_{12}\dot{u}^2)\dot{u}^2. \end{aligned}$$

Für die u^1-Parameterlinien ist $u^2(t) = \text{const}$, also $\dot{u}^2 = 0$. Damit folgt insbesondere

$$(b_{22}g_{11}\dot{u}^1 + b_{22}g_{12}\dot{u}^2)\dot{u}^2 = 0,$$

d.h. die u^1-Parameterlinien sind Krümmungslinien.

Aufgabe 3. Wendelfläche. **(6 Punkte)**

Gegeben sei die Fläche mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (\sinh(u^2)\cos u^1, \sinh(u^2)\sin u^1, u^1).$$

(a) Berechnen Sie die Gaußkrümmung von x.

(b) Untersuchen Sie, ob es unter den Parameterlinien Asymptotenlinien gibt.

(c) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche x.

(d) Zeigen Sie, dass die durch

$$\widetilde{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (v^1, v^2) \mapsto \widetilde{x}(v^1, v^2) = (v^2 \cos v^1, v^2 \sin v^1, v^1)$$

gegebene Fläche eine Umparametrisierung von x ist.

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
x_{u^1}(u^1, u^2) &= (-\sinh u^2 \sin u^1, \sinh u^2 \cos u^1, 1),\\
x_{u^2}(u^1, u^2) &= (\cosh u^2 \cos u^1, \cosh u^2 \sin u^1, 0),\\
x_{u^1} \times x_{u^2} &= (-\cosh u^2 \sin u^1, \cosh u^2 \cos u^1, -\sinh u^2 \cosh u^2)\\
&= \cosh u^2 \cdot (-\sin u^1, \cos u^1, -\sinh u^2).
\end{aligned}$$

x ist regulär, da $x_{u^1} \times x_{u^2} \neq o$ gilt.

Die ersten Fundamentalgrößen sind

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle x_{u^1}, x_{u^1} \rangle = (\sinh u^2)^2 + 1 = (\cosh u^2)^2,\\
g_{12} &= \langle x_{u^1}, x_{u^2} \rangle = 0 = g_{21},\\
g_{22} &= \langle x_{u^2}, x_{u^2} \rangle = (\cosh u^2)^2,\\
g &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\cosh u^2)^4.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$n = \frac{1}{\sqrt{g}} x_{u^1} \times x_{u^2} = \frac{1}{\cosh u^2} \cdot (-\sin u^1, \cos u^1, -\sinh u^2).$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
x_{u^1u^1}(u^1, u^2) &= (-\sinh u^2 \cos u^1, -\sinh u^2 \sin u^1, 0),\\
x_{u^1u^2}(u^1, u^2) &= (-\cosh u^2 \sin u^1, \cosh u^2 \cos u^1, 0),\\
x_{u^2u^2}(u^1, u^2) &= (\sinh u^2 \cos u^1, \sinh u^2 \sin u^1, , 0),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \langle x_{u^1u^1}, n \rangle = 0,\\
b_{12} &= \langle x_{u^1u^2}, n \rangle = \frac{1}{\cosh u^2} \cdot \cosh u^2 = 1 = b_{21},\\
b_{22} &= \langle x_{u^2u^2}, n \rangle = 0,\\
b &= b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -1.
\end{aligned}$$

Die Gaußkrümmung ist gegeben durch

$$K = \frac{b}{g} = \frac{-1}{(\cosh u^2)^4}.$$

(b) Wegen $b_{11} = b_{22} = 0$ sind alle Parameterlinien Asymptotenlinien.

(c) Die Differentialgleichung (DK) für Krümmungslinien vereinfacht sich in unserem Fall zu der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (b_{21}g_{11} - b_{11}g_{21}) \left(\dot{u}^1\right)^2 + (b_{22}g_{11} - b_{11}g_{22})\, \dot{u}^1\dot{u}^2 + (b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22}) \left(\dot{u}^2\right)^2 \\ &= b_{21}g_{11} \left(\dot{u}^1\right)^2 - b_{12}g_{22} \left(\dot{u}^2\right)^2 = (\cosh u^2)^2 \left(\dot{u}^1\right)^2 - (\cosh u^2)^2 \left(\dot{u}^2\right)^2. \end{aligned}$$

Wegen $\cosh u^2 > 0$ ist dies äquivalent zu

$$\left(\dot{u}^2\right)^2 = \left(\dot{u}^1\right)^2 \quad \iff \quad \dot{u}^2 = \pm\dot{u}^1 \quad \iff \quad u^2 = \pm u^1 + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Die Krümmungslinien sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} &c_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x\,(t, t + C) = (\sinh(t + C) \cos t, \sinh(t + C) \sin t, t), \quad C \in \mathbb{R}, \\ &c_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x\,(t, -t + C) = (\sinh(-t + C) \cos t, \sinh(-t + C) \sin t, t), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} v^1(u^1, u^2) &= u^1 \\ v^2(u^1, u^2) &= \sinh u^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial(v^1, v^2)}{\partial(u^1, u^2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial v^1}{\partial u^2} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh u^2 \end{vmatrix} = \cosh u^2 > 0.$$

Weiter ist

$$\widetilde{x}\big(v^1(u^1, u^2), v^2(u^1, u^2)\big) = (\sinh u^2 \cos u^1, \sinh u^2 \sin u^1, u^1) = x(u^1, u^2),$$

d.h. $(*)$ ist eine Parametertransformation, und $\widetilde{x}$ eine Umparametrisierung von x.

Aufgabe 4. Geodätische. **(6 Punkte)**

Gegeben sei die Fläche mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (\sin(u^2 - u^1), \cos(u^2 - u^1), u^1 + u^2)\,.$$

(a) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole von x und geben Sie das System von Differentialgleichungen für Geodätische an.

(b) Bestimmen Sie alle Geodätische durch den Punkt $x(0,0) = (0,1,0)$.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Teilstücks $x(V)$ mit

$$V := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq u^1 \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq u^2 \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
x_{u^1}(u^1, u^2) &= (-\cos(u^2 - u^1), \sin(u^2 - u^1), 1),\\
x_{u^2}(u^1, u^2) &= (\cos(u^2 - u^1), -\sin(u^2 - u^1), 1),\\
g_{11} &= \langle x_{u^1}, x_{u^1}\rangle = 1 + 1 = 2,\\
g_{12} &= \langle x_{u^1}, x_{u^2}\rangle = -\cos^2(u^2 - u^1) - \sin^2(u^2 - u^1) + 1 = 0 = g_{21},\\
g_{22} &= \langle x_{u^2}, x_{u^2}\rangle = 1 + 1 = 2,\\
g &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 4.
\end{aligned}$$

Damit folgt $g_{ij,k} = 0$ und somit $\Gamma_{ij}^k = 0$ für alle $i, j, k = 1, 2$. Das System von Differentialgleichungen für Geodätische lautet also

$$\begin{aligned}
\ddot{u}^1 &= 0,\\
\ddot{u}^2 &= 0.
\end{aligned}$$

(b) Jede Geodätische ist daher von der Form $c(t) = x(u^1(t), u^2(t))$ mit

$$u^i(t) = a_i \cdot t + d_i, \quad i = 1, 2.$$

Verwendet man die Anfangsbedingungen $u^1(0) = u^2(0) = 0$, so folgt $d_1 = d_2 = 0$, also ist jede Geodätische c mit $c(0) = x(0,0)$ gegeben durch

$$c(t) = x(a_1 t, a_2 t) = (\sin((a_2 - a_1)t), \cos((a_2 - a_1)t), (a_2 + a_1)t)\,.$$

(c) Für den Flächeninhalt des Teilstücks $x(V)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(x(V)) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{g(u^1, u^2)}\, \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\, \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2\\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u^1 \right)}_{=\pi} \mathrm{d}u^2 = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u^2 = 2 \cdot \pi^2.
\end{aligned}$$