

Mathematische Grundlagen für die Vorlesung „Differentialgeometrie“

Dr. Gabriele Link

13.10.2010

In diesem Text sammeln wir die nötigen mathematischen Grundlagen, die wir in der Vorlesung „Differentialgeometrie“ benötigen. Die einzelnen Begriffe sind aus der Vorlesung *Höhere Mathematik* bekannt und werden hier lediglich kurz wiederholt.

1 Der euklidische Vektorraum \mathbb{R}^3

1.1 \mathbb{R}^3 als Vektorraum

Zunächst betrachten wir die Grundmenge

$$\mathbb{R}^3 := \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}, \quad (1)$$

deren Elemente wir **Vektoren** nennen. Das Element $o = (0, 0, 0)$ heißt **Nullvektor**.

Um der Menge (1) eine Struktur zu geben, führen wir eine **Addition** von Elementen $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ein, die durch

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

komponentenweise erklärt wird.

Weiter definieren wir für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

eine **skalare Multiplikation**, die wie die Addition komponentenweise erklärt ist.

Mit Hilfe der speziellen Vektoren $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$ und $e_3 := (0, 0, 1)$ lässt sich jeder Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ eindeutig darstellen (linear kombinieren) via

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3. \quad (2)$$

Weil mit Linearkombinationen der Vektoren e_1, e_2, e_3 *jeder* Vektor des \mathbb{R}^3 dargestellt werden kann, heißen sie **erzeugend**, aufgrund der *Eindeutigkeit* der Darstellung (2) von $x \in \mathbb{R}^3$ durch e_1, e_2, e_3 nennt man sie **linear unabhängig**.

BEMERKUNGEN

- Die Vektoren b_1, \dots, b_d in \mathbb{R}^3 heißen linear unabhängig genau dann, wenn der Nullvektor nur durch $o = 0 \cdot b_1 + \dots + 0 \cdot b_d$ linear kombiniert werden kann.
- Im Falle von zwei Vektoren b_1, b_2 ist dies äquivalent dazu, dass b_2 kein Vielfaches von b_1 ist.
- Vier oder mehr Vektoren im \mathbb{R}^3 sind immer linear abhängig.

DEFINITION 1.1. *Eine Menge aus linear unabhängigen und erzeugenden Vektoren eines Vektorraumes heißt **Basis** des Vektorraums. Die Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ heißt **Standardbasis** des \mathbb{R}^3 .*

1.2 Geometrie im \mathbb{R}^3

Um Längen und Winkel im \mathbb{R}^3 zu messen, verwenden wir als Werkzeug das **Standardskalarprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das folgendermaßen definiert ist: Für $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ setzen wir

$$\langle x, y \rangle := \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \quad (3)$$

Der \mathbb{R}^3 mit diesem Standardskalarprodukt ist ein **euklidischer Vektorraum**. Man nennt ihn auch euklidischen Standardraum, um klarzumachen, dass das ausgezeichnete Skalarprodukt (3) gemeint ist.

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ und

$$\langle z, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle. \quad (\text{Übung})$$

Außerdem ist das Skalarprodukt **positiv definit**, d. h. $\langle x, x \rangle \geq 0$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$, und

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = o.$$

Deshalb lässt sich über das Skalarprodukt die **Norm** (oder **Länge**) eines Vektors folgendermaßen definieren:

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Vektoren x mit der Länge $|x| = 1$ heißen **Einheitsvektoren**.

Sind $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt für die Norm

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot x| &= |\lambda| |x|, \\ |x + y| &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ definiert $|x - y|$ den **Abstand** zwischen x und y .

Außerdem gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|.$$

Diese impliziert dass für $x \neq o$ und $y \neq o$

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{|x| |y|} \leq 1, \quad \text{d.h.} \quad -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|} \leq 1.$$

Somit lässt sich der **Winkel** $\angle(x, y) \in [0, \pi]$ zwischen x und y definieren durch

$$\cos \angle(x, y) := \frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|}.$$

Es folgt direkt dass $\langle x, y \rangle = 0$ genau dann wenn $\angle(x, y) = \pi/2$. In diesem Falle heißen x und y **orthogonal** und wir schreiben $x \perp y$. Gilt ausserdem $|x| = |y| = 1$, so heißen x und y **orthonormal**. Insbesondere sind die Vektoren e_1, e_2 und e_3 paarweise orthonormal.

Eine Basis aus paarweise orthonormalen Vektoren heißt **Orthonormalbasis**. Ein Beispiel für eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 ist die Standardbasis e_1, e_2, e_3 .

1.3 Punkte, Geraden und Ebenen

Zu zwei beliebigen Punkten P und Q im dreidimensionalen Raum gibt es genau einen Vektor $x = \overrightarrow{PQ} \in \mathbb{R}^3$ sodass $Q = P + x$. Fixiert man einen Ursprung O im dreidimensionalen Raum, so kann man jeden Punkt P eindeutig durch seinen **Ortsvektor** $p = \overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ beschreiben. Die Zahlen $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$ heißen **Koordinaten** von P . Ist $\overrightarrow{OQ} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, so folgt

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).$$

Der **Abstand** $d(P, Q)$ zwischen P und Q ist

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |q - p|.$$

Ganz allgemein gilt für drei Punkte P, Q und R

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}.$$

Eine **Gerade** g im Raum kann folgendermaßen parametrisiert werden: Man wähle zwei (verschiedene) Punkte P und Q auf g und betrachte die Vektoren $a := \overrightarrow{OP}$, $b := \overrightarrow{PQ}$. Dann ist die Menge aller Ortsvektoren auf g gegeben durch

$$g := \{a + s \cdot b : s \in \mathbb{R}\}.$$

Ist E eine **Ebene** im Raum, so wählen wir drei Punkte P, Q, R auf E , die nicht auf einer Geraden liegen. Setzt man nun $a := \overrightarrow{OP}$, $b := \overrightarrow{PQ}$ und $c := \overrightarrow{PR}$, so ist die Menge aller Ortsvektoren auf E gegeben durch

$$E := \{a + s \cdot b + t \cdot c : s, t \in \mathbb{R}\}. \quad (4)$$

Beachte, dass b und c linear unabhängig sind, da P, Q und R nicht auf einer Geraden liegen!

Ein Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle n, b \rangle = \langle n, c \rangle = 0$ heißt **Normalenvektor** der Ebene E ; ist außerdem $|n| = 1$, so heißt n **Normaleneinheitsvektor**. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, wie man zu jeder Ebene im \mathbb{R}^3 einen Normalenvektor konstruieren kann.

Wir möchten nun die **Orthogonalprojektion** Π_E auf E bestimmen: Seien $n \in \mathbb{R}^3$ ein Normaleneinheitsvektor von E , und $p = (p_1, p_2, p_3)$ der Ortsvektor eines Punktes P . Dann ist die Gerade

$$g = \{p + r \cdot n : r \in \mathbb{R}\}$$

orthogonal zu E und ihr Schnittpunkt mit E ist genau die Orthogonalprojektion von P auf E . Wir suchen also $r, s, t \in \mathbb{R}$ sodass die Gleichung

$$p + r \cdot n = a + s \cdot b + t \cdot c$$

gilt. Bildet man das Skalarprodukt jeder Seite mit dem Vektor n , so erhalten wir die Bedingung

$$\langle p, n \rangle + r = \langle a, n \rangle, \quad \text{also } r = \langle a - p, n \rangle.$$

Die Orthogonalprojektion von P auf E besitzt also den Ortsvektor

$$\Pi_E(p) = p + \langle a - p, n \rangle n.$$

Der **Abstand** $d(P, E)$ des Punktes P zur Ebene E ist dann genau die Länge des Vektors $p - \Pi_E(p) = \langle a - p, n \rangle n$, also

$$d(P, E) = |\langle a - p, n \rangle|.$$

Der Normaleneinheitsvektor n einer Ebene E ist auch nützlich zur Bestimmung des Winkels zwischen E und einer Geraden $g := \{u + r \cdot v : r \in \mathbb{R}\}$: Ist $\theta \in [0, \pi/2]$ der Winkel zwischen E und g , so ist $\pi/2 - \theta$ der Winkel zwischen g und der Geraden durch den Schnittpunkt von E und g mit Richtung n ; dieser ist gegeben durch

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \frac{|\langle n, v \rangle|}{|v|}.$$

Wegen $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ berechnet sich der Winkel θ zwischen E und g durch

$$\sin \theta = \frac{|\langle n, v \rangle|}{|v|}.$$

Alternativ zur Parameterdarstellung (4) kann die Menge der Ortsvektoren $x \in \mathbb{R}^3$ einer Ebene E auch durch die Gleichung

$$\langle x, n \rangle = d \tag{5}$$

beschrieben werden, wobei $n \in \mathbb{R}^3$ der Normaleneinheitsvektor von E ist, der vom Ursprung in Richtung der Ebene zeigt, und $d \geq 0$ der Abstand vom Ursprung zur Ebene ist. Die Darstellung einer Ebene E durch die Gleichung (5) heißt **Hesse-Normalform** von E .

1.4 Das Vektorprodukt

Für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ setzen wir

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Der Vektor $x \times y$ heißt **Vektorprodukt** (oder **Kreuzprodukt**) der Vektoren x und y .

Sind $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, so gelten die folgenden Aussagen, die zum Teil in der Übung gezeigt werden sollen:

- $x \times y \perp x$ und $x \times y \perp y$
- $x \times y = -(y \times x)$
- $|x \times y| = |x||y| \sin \angle(x, y)$; geometrisch ist dies der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.
- $\langle x, y \times z \rangle = \langle y, z \times x \rangle$
- $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$
- x, y linear abhängig $\iff x \times y = o$

Beachte, dass im allgemeinen

$$(x \times y) \times z \neq x \times (y \times z).$$

Ist $E := \{a + s \cdot b + t \cdot c : s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene im \mathbb{R}^3 , so ist der Vektor $b \times c$ ein Normalenvektor von E ; einen Normaleneinheitsvektor n von E erhält man durch Normierung

$$n = \frac{b \times c}{|b \times c|}.$$

Der Normaleneinheitsvektor einer Ebene ist bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt.

1.5 Rang einer Matrix

Der **Rang** einer Matrix ist definiert als maximale Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen. Ist speziell A eine $(2, 3)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

so gilt $\text{Rang}(A) = 2$ genau dann, wenn die Zeilen $b = (b_1, b_2, b_3)$ und $c = (c_1, c_2, c_3)$ linear unabhängig sind, d.h. wenn gilt

$$b \times c \neq o.$$

Andernfalls hat A Rang 1.

2 Vektorwertige Funktionen

2.1 Motivation

Eine Gerade $g := \{a + t \cdot b : t \in \mathbb{R}\}$ im \mathbb{R}^3 kann auch betrachtet werden als Bildmenge einer Funktion

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(t) := a + t \cdot b = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3). \quad (6)$$

Allgemeiner kann man **Vektorfunktionen** einer reellen Variablen betrachten: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist die Funktion

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

eine Vektorfunktion. Die reellwertigen Funktionen x_1 , x_2 und x_3 heißen **Koordinatenfunktionen**.

BEISPIEL

Es sei $I = [0, 4\pi] \subset \mathbb{R}$, $r > 0$ und $c \in \mathbb{R}$. Setze

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x(t) := (r \cos t, r \sin t, ct). \quad (7)$$

Die Bildmenge von x ist eine sogenannte *Helix* (oder auch *Schraubenlinie*). Für $c = 0$ ist die Bildmenge ein Kreis in der (x_1, x_2) -Ebene; im allgemeinen liegt die Kurve auf einem Zylinder vom Radius r um die x_3 -Achse.

2.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt bezeichne $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.

DEFINITION 2.1. Ist $t_0 \in I$, so heißt $f_0 \in \mathbb{R}$ **Grenzwert** von f für t gegen t_0 , wenn

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - f_0| = 0.$$

In diesem Fall schreiben wir $f_0 := \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$.

f heißt **stetig** an der Stelle $t = t_0$, falls $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$. f heißt stetig, falls f für alle $t \in I$ stetig ist.

Eine Vektorfunktion ist stetig genau dann, wenn alle Koordinatenfunktionen es sind.

BEISPIELE

Die Vektorfunktionen (6) und (7) sind stetig.

Die Vektorfunktion

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(t) = \begin{cases} t \cdot e_1 & \text{für } t < 0 \\ e_3 + t \cdot e_2 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig an der Stelle $t = 0$.

DEFINITION 2.2. f heißt **differenzierbar** an der Stelle $t_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$f'(t_0) = \frac{d}{dt} f(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(t_0)$ die **Ableitung** von f an der Stelle t_0 . f heißt differenzierbar, falls f für alle $t \in I$ differenzierbar ist.

Eine Vektorfunktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ist differenzierbar genau dann, wenn alle Koordinatenfunktionen es sind. In diesem Falle ist die Ableitung an der Stelle $t_0 \in I$ gegeben durch

$$x'(t_0) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0), x'_3(t_0)).$$

Seien nun $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbare Vektorfunktionen, und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Ableitung besitzt folgende Eigenschaften:

- $(x(t) + y(t))' = x'(t) + y'(t)$
- $(f(t) \cdot x(t))' = f'(t) \cdot x(t) + f(t) \cdot x'(t)$
- **Produktregel für Skalarprodukt:**

$$\langle x(t), y(t) \rangle' = \langle x'(t), y(t) \rangle + \langle x(t), y'(t) \rangle$$

- **Produktregel für Vektorprodukt:**

$$(x(t) \times y(t))' = x'(t) \times y(t) + x(t) \times y'(t)$$

- **Kettenregel:**

Ist $t : J \rightarrow I$, $s \mapsto t(s)$ differenzierbar, so ist

$$x \circ t : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto x(t(s))$$

differenzierbar und es gilt an der Stelle $s_0 \in J$

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=s_0} x(t(s)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} x(t) \cdot \frac{d}{ds} \Big|_{s=s_0} t(s),$$

wobei $t_0 = t(s_0)$ ist.

BEMERKUNG

Die Produktregel für das Skalarprodukt hat eine für die Vorlesung wichtige Folgerung: Ist $|x(t)| = 1$ für alle $t \in I$, so folgt durch Ableiten der Gleichung $1 = \langle x(t), x(t) \rangle$ nach t

$$0 = \langle x(t), x(t) \rangle' = \langle x'(t), x(t) \rangle + \langle x(t), x'(t) \rangle = 2\langle x'(t), x(t) \rangle,$$

d.h. $x'(t)$ ist orthogonal zu $x(t)$ für alle $t \in I$.

DEFINITION 2.3. Falls für f alle Ableitungen beliebig hoher Ordnung existieren, so heißt f **glatt** oder **C^∞ -Funktion**. Eine Vektorfunktion ist glatt bzw. eine C^∞ -Funktion, falls alle Koordinatenfunktionen es sind.

2.3 Vektorfunktionen mit zwei Variablen

Allgemeiner kann man **Vektorfunktionen zweier reeller Variablen** betrachten: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 , so wird durch die Vorschrift

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (x_1(u^1, u^2), x_2(u^1, u^2), x_3(u^1, u^2))$$

eine Vektorfunktion mit 2 Variablen definiert.

BEISPIELE

Die **Ebene** $E := \{a + s \cdot b + t \cdot c : s, t \in \mathbb{R}\}$ ist Bild der Vektorfunktion

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto x(s, t) := a + s \cdot b + t \cdot c.$$

Für $r > 0$ beschreibt die Vektorfunktion

$$x : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (\varphi, \theta) \mapsto x(\varphi, \theta) := (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

eine **Sphäre** vom Radius r .

Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion sowie $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Vektorfunktion mit 2 Variablen. Analog zu Definition 2.1 können für f Grenzwert und Stetigkeit definiert werden.

DEFINITION 2.4. Ist $u_0 \in U$, so heißt $f_0 \in \mathbb{R}$ **Grenzwert** von f für u gegen u_0 , falls

$$\lim_{u \rightarrow u_0} |f(u) - f_0| = 0.$$

In diesem Fall schreiben wir $f_0 := \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

f heißt **stetig** an der Stelle $u = u_0$, falls $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$. f heißt stetig, falls f für alle $u \in U$ stetig ist.

Eine Vektorfunktion ist stetig genau dann, wenn alle Koordinatenfunktionen es sind.

Fixiert man in $f(u^1, u^2)$ eine der beiden Variablen, so erhält man jeweils eine Funktion, die nur von einer Variablen abhängt.

DEFINITION 2.5. f heißt **partiell differenzierbar** nach u^1 bzw. u^2 an der Stelle $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$f_{u^1}(u_0) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(u_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0^1 + h, u_0^2) - f(u_0^1, u_0^2)}{h} \quad \text{bzw.}$$

$$f_{u^2}(u_0) = \frac{\partial f}{\partial u^2}(u_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0^1, u_0^2 + h) - f(u_0^1, u_0^2)}{h}.$$

In diesem Fall heißt $f_{u^k}(u_0)$ die **partielle Ableitung** von f nach u^k an der Stelle u_0 (für $k = 1, 2$).

f heißt **partiell differenzierbar**, falls f für alle $u \in U$ partiell differenzierbar nach beiden Variablen ist.

f heißt **zweimal partiell differenzierbar** in $u_0 \in U$, wenn alle zweiten partiellen Ableitungen

$$f_{u^i u^k} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

von f existieren. Analog werden **partielle Ableitungen höherer Ordnung** definiert.

f heißt **glatt** oder C^∞ -**Funktion**, falls alle partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung existieren.

DEFINITION 2.6. Eine Vektorfunktion $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u \mapsto x(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ heißt **partiell differenzierbar** oder **glatt**, wenn alle Koordinatenfunktionen es sind.

In diesem Falle ist die partielle Ableitung nach u^k (für $k = 1, 2$) an der Stelle $u_0 \in U$ gegeben durch

$$x_{u^k}(u_0) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^k}(u_0), \frac{\partial x_2}{\partial u^k}(u_0), \frac{\partial x_3}{\partial u^k}(u_0) \right).$$

Die **Jacobi-Matrix** von x in u_0 ist definiert durch

$$J_x(u_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x_2}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x_3}{\partial u^1}(u_0) \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2}(u_0) & \frac{\partial x_2}{\partial u^2}(u_0) & \frac{\partial x_3}{\partial u^2}(u_0) \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern an die **verallgemeinerte Kettenregel** für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen:

PROPOSITION 2.7. Sind $\varphi_1, \varphi_2 : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Vektorfunktion mit stetigen partiellen Ableitungen und $(\varphi_1(I), \varphi_2(I)) \subseteq U$, so ist die Vektorfunktion

$$x \circ (\varphi_1, \varphi_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

differenzierbar. Die Ableitung an der Stelle $t_0 \in I$ ist gegeben durch

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} x(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = x_{u^1}(u_0) \cdot \varphi_1'(t_0) + x_{u^2}(u_0) \cdot \varphi_2'(t_0),$$

wobei $u_0 = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$.

Außerdem gilt folgender für die Flächentheorie wichtiger

SATZ 2.8 (**Umkehrsatz für Vektorfunktionen**). Ist $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatt, $u_0 \in U$ mit $\text{Rang}(J_x(u_0)) = 2$, so existiert eine Umgebung $W \subseteq U$ von u_0 sodass $x : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv ist. Insbesondere existiert die Umkehrabbildung $x(W) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow W$, die ebenfalls glatt ist.

In der Vorlesung verwenden wir die

KONVENTION 2.9. Die Formulierung „ x ist differenzierbar“ bedeutet, dass x partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt.