

# Elementare Geometrie

## Übungsblatt 1

### Aufgabe 1

Für  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  sei

$$d(x, y) := |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|.$$

Zeigen Sie, dass  $d$  eine Pseudometrik auf  $\mathbb{R}^2$  ist.

### Aufgabe 2

Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  seien

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind.
- (b) Für  $i = 1, 2, \infty$  sei  $d_i$  die von  $\|\cdot\|_i$  induzierte Metrik. Bestimmen und zeichnen Sie die Einheitsbälle  $\overline{B}_1^{d_1}(0)$ ,  $\overline{B}_1^{d_2}(0)$ ,  $\overline{B}_1^{d_\infty}(0)$  für  $n = 2$ .

### Aufgabe 3

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, seien  $x, y \in X$  und  $r_1, r_2$  positive reelle Zahlen.

Zeigen Sie:

- (a) Falls  $d(x, y) \geq r_1 + r_2$ , so sind die Bälle  $B_{r_1}(x)$  und  $B_{r_2}(y)$  disjunkt.
- (b) Falls  $d(x, y) \leq r_1 - r_2$ , so gilt  $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$ .

Zeigen Sie, dass die Umkehrungen dieser Aussagen im Allgemeinen nicht gelten, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

Achtung:  $B_r(p) := \{q \in X : d(p, q) < r\}$  ist der *offene Ball* um  $p$ . Nicht mit dem *abgeschlossenen Ball*  $\overline{B}_r(p) := \{q \in X : d(p, q) \leq r\}$  verwechseln!

### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für die Metriken aus Aufgabe 2 gilt:

- (a)  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  und  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$  sind isometrisch.
- (b)  $(\mathbb{R}^n, d_1)$  und  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  sind nicht isometrisch für  $n > 2$ . (★)

# Tutorien

Zur Auswahl stehen folgende Tutorien:

- Tutorium 1: Montags, 14:00 - 15:30, 20.30 SR -1.025, Sebastian Ohrem
- Tutorium 2: Dienstags, 9:45 - 11:15, 20.30 SR -1.011, David Bückel
- Tutorium 3: Dienstags, 14:00 - 15:30, 20.30 SR -1.012, Pascal Bothe
- Tutorium 4: Mittwochs, 14:00 - 15:30, 20.30 SR -1.012, Arthur Martirosian

Bei folgendem Link können Sie sich für die Tutorien anmelden:

<https://iaguar.math.kit.edu/tutorienverwaltung/anmeldung.php?vorid=139>

---

Abgabe bis spätestens Freitag, den 27. 10. 2017, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!