Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Ebene und Zylinder sind lokal isometrisch)
Sei $U := (0,1) \times (0,\infty)$. Gegeben seien die parametrisierten Flächenstücke

$$x : U \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$$

und

$$x' : U \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto (u,v,0).$$

Geben Sie eine explizite lokale Isometrie von $x(U)$ nach $x'(U)$ an.

Aufgabe 2 (Gauß-Krümmung von Rotationsflächen)
Eine *Rotationsfläche* ist gegeben durch eine lokale Parametrisierung der Form

$$x : (0,2\pi) \times (a,b) \to \mathbb{R}^3,$$

$$(u,v) \mapsto (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)),$$

entsteht also durch Rotation der Kurve $v \mapsto (\varphi(v), 0, \psi(v))$ in der x_1x_3-Ebene um die x_3-Achse.

Dabei gelte $\varphi(v) \neq 0$ und $\frac{d}{dv}(\varphi(v), 0, \psi(v)) \neq (0,0,0)$ für alle $v \in (a,b)$.

(a) Berechnen Sie die Gauß-Krümmung von x in Abhängigkeit von φ und ψ.

(b) Geben Sie Beispiele von Rotationsflächen mit konstanten Gauß-Krümmungen 0, 1 bzw. -1 an.

Aufgabe 3 (Geodätische Krümmung und Umparametrisierung)
Sei S eine reguläre Fläche und $c : (0,l) \to S,\ t \mapsto c(t)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve.

Weiter sei $\tilde{c} : (0,l) \to S$ die Umparametrisierung von c gegeben durch $\tilde{c}(t) := c(l-t)$. Zeigen Sie, dass für die geodätischen Krümmungen κ_g und $\tilde{\kappa}_g$ von c bzw. $\tilde{c}$ gilt:

$$\tilde{\kappa}_g(t) = -\kappa_g(l-t).$$

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 19. 01. 2018, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!