Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Gauß-Krümmung des Rotationstorus)
Seien $R, r \in \mathbb{R}$ mit $R > r > 0$, und sei $T^2(R, r)$ der Rotationstorus gegeben durch lokale Parametrisierungen der Form

$$x : U \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos u)\cos v \\ (R + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix}.$$

wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 9. Bestimmen und skizzieren Sie die Bereiche von $T^2(R, r)$ mit positiver, negativer und verschwindender Gauß-Krümmung.

Aufgabe 2 (Topologie der Riemannschen Zahlenkugel)
Eine Teilmenge $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt offen in $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, falls $U \cap \mathbb{C}$ offen in der Standardtopologie von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist, und falls im Falle $\infty \in U$ das Komplement $\mathbb{C} \setminus U$ beschränkt ist. Dies definiert eine Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$.

Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{C}}$ mit dieser Topologie kompakt ist.

Aufgabe 3 (Möbiustransformation)
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Die Abbildung

$$M_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}$$

heißt von A induzierte *Möbiustransformation*.

Zeigen Sie, dass M_A bijektiv ist.

Aufgabe 4 (Modelltransformation)
Sei $D^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und $H^2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$.

Bezüglich der Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$ ist $\overline{D^2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und $\overline{H^2} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{\infty\}$.

Sei nun

$$M : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}, \quad \infty \mapsto i$$

eine ausgewählte Möbiustransformation. Zeigen Sie:

(a) $M(H^2) = D^2$,

(b) $M(\overline{H^2}) = \overline{D^2}$,

(c) $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1$.

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 2. 2. 2018, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!