Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Zeigen Sie: Kreise und Geraden in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ sind genau diejenigen Teilmengen von $\mathbb{C}$, die man in der Form

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0\}$$

schreiben kann, wobei $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ sind mit $\beta\bar{\beta} > \alpha\gamma$.

Aufgabe 2
Gegeben sei die Abbildung

$$\mathcal{J} : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto -1/z, \quad 0 \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto 0.$$

(a) Zeigen Sie: Für jeden Kreis und jede Gerade $K \subset \bar{\mathbb{C}}$ ist $\mathcal{J}(K)$ ein Kreis oder eine Gerade in $\bar{\mathbb{C}}$.

(b) Ist $\mathcal{J}|_{H^2}$ eine Möbiustransformation?

Aufgabe 3
Sei L ein Halbkreis oder eine Halbgerade in H^2, sodass L die reelle Achse in einem Punkt α orthogonal schneidet. Zeigen Sie: Die Abbildung $T : z \mapsto \frac{1}{\alpha - z} + \beta$ ist eine Möbiustransformation und bildet L für ein geeignetes $\beta \in \mathbb{R}$ auf die positive imaginäre Halbachse ab.

Aufgabe 4
Die Metrik d_h^* auf der Einheitskreisscheibe $D^2 \subset \mathbb{C}$ sei definiert durch $d_h^*(z, z') := d_h(M^{-1}(z), M^{-1}(z'))$, wobei $M : H^2 \to D^2,\ z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$ ist (vgl. Aufgabe 4, Übungsblatt 11) und d_h die hyperbolische Metrik auf der oberen Halbebene H^2 bezeichnet.

Zeigen Sie, dass (D^2, d_h^*) homogen ist.

Keine Abgabe! Die Musterlösung wird am Freitag, 9. 2. 2018, in der Übung besprochen.