Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Homogenität)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt *homogen*, falls für alle $p, q \in X$ eine Isometrie $\varphi : (X, d) \to (X, d)$ existiert sodass $\varphi(p) = q$.

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *2-Punkt-homogen*, falls für alle $p_1, p_2, q_1, q_2 \in X$ mit $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$ eine Isometrie $\varphi : (X, d) \to (X, d)$ existiert mit $\varphi(p_1) = q_1$ und $\varphi(p_2) = q_2$.

Zeigen Sie:

(a) Die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik d_e ist 2-Punkt-homogen.

(b) Die Sphäre S^2 mit der sphärischen Metrik d_s ist 2-Punkt-homogen.

Aufgabe 2 (Folgenstetigkeit)
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt *folgenstetig*, falls für jede konvergente Folge (x_n) in (X, d_X) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ genau dann stetig ist, wenn sie folgenstetig ist.

Aufgabe 3 (Standardtopologie auf $\mathbb{R}$)
Sei $B := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller offenen reellen Intervalle. Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := \left\{\bigcup_{I\in U} I \,\middle|\, U \subseteq B\right\}$ die Menge aller möglichen Vereinigungen offener Intervalle.

Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Sierpińskiraum)
Sei $X := \{0, 1\}$ und $\mathcal{O}_X := \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.

(a) Beweisen Sie, dass $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum ist.

(b) Ist $\mathcal{O}_X$ von einer Metrik erzeugt?

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 03. 11. 2017, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!