Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

# Elementare Geometrie

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1** (Topologie einer Metrik)
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Menge aller $d$-offenen Teilmengen von $X$ eine Topologie auf $X$ bildet.

**Aufgabe 2** (Produkttopologie)
Seien $X, Y_1, Y_2$ topologische Räume, und seien $p_i : Y_1 \times Y_2 \to Y_i,\ (y_1, y_2) \mapsto y_i$ für $i = 1, 2$ die Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente des Produkts $Y_1 \times Y_2$.

(a) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f : X \to Y_1 \times Y_2$ ist genau dann stetig, wenn $f_1 := p_1 \circ f$ und $f_2 := p_2 \circ f$ stetig sind.

(b) Sind $p_1, p_2$ stets offen?

(c) Sind $p_1, p_2$ stets abgeschlossen?

**Aufgabe 3** (Hausdorffräume und stetige Abbildungen)
Seien $X, Y$ Hausdorffräume und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen ist.

**Aufgabe 4** (Quotiententopologie und Hausdorffräume)
Sei $X$ ein topologischer Raum mit einer Äquivalenzrelation $\sim$, und es sei angenommen, dass die kanonische Abbildung $X \to X/\sim$ offen ist. Zeigen Sie:

(a) Hat $X$ eine abzählbare Basis, so auch $X/\sim$.

(b) Ist $R := \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ abgeschlossen in $X \times X$, so ist $X/\sim$ hausdorffsch.

---

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 10. 11. 2017, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!