Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Zusammenhang)
Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, so ist auch $\overline{A}$ zusammenhängend.

(b) Sind $A, B \subseteq X$ zusammenhängend mit $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.

(c) Ist $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X, sodass $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

Aufgabe 2 (Cantorsches Diskontinuum)
Sei $P := \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \{0, 1\}\}$ die Menge aller Folgen, deren Folgenglieder alle 0 oder 1 sind. Für beliebige $a \in P$, $M \subseteq \mathbb{N}$ sei $U_M(a) := \{c \in P \mid \forall i \in M : c_i = a_i\}$. Weiter sei $B := \{U_M(a) : a \in P, M \subseteq \mathbb{N}, |M| < \infty\}$.

(a) Zeigen Sie, dass B die Basis einer Topologie $\mathcal{O}_P$ auf P bildet.

(b) Ist $(P, \mathcal{O}_P)$ zusammenhängend, unzusammenhängend oder total unzusammenhängend?

(c) Ist $(P, \mathcal{O}_P)$ diskret?

Aufgabe 3 (Direktes Produkt)
Sei $(P, \mathcal{O}_P)$ wie in Aufgabe 2. Sei $Z := \{0, 1\}$ der Zwei-Punkte-Raum mit der diskreten Topologie. Sei X ein weiterer topologischer Raum. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $p_i : (P, \mathcal{O}_P) \to Z$ gegeben durch $p_i(a) := a_i$ für $a \in P$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to (P, \mathcal{O}_P)$ genau dann stetig ist, wenn $f_i := p_i \circ f$ stetig ist für alle $i \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to (P, \mathcal{P}(P))$ *nicht* genau dann stetig ist, wenn $f_i := p_i \circ f$ stetig ist für alle $i \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Vergleiche diese Aufgabe mit Aufgabe 2 von Blatt 3.

Aufgabe 4 (Zusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}$)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie alle Intervalle zusammenhängend sind.

Zeigen Sie die Umkehrung: Jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall.

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 17. 11. 2017, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!