Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (Zusammenhang konvexer Mengen)
Eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für $p, q \in Y$ auch das Geradensegment $\overline{pq}$ in Y liegt.

Zeigen Sie: Jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 2 (Endliche Durchschnittseigenschaft)
Sei X ein topologischer Raum. Man sagt, eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X habe die *endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn für alle endlichen $E \subset I$ gilt $\bigcap_{i \in E} A_i \neq \emptyset$.

Beweisen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn für alle Familien $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft gilt $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 3 (Bilder kompakter Mengen)
Sei X ein nichtleerer, kompakter topologischer Raum, und sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

f nimmt auf X ein endliches Maximum und ein endliches Minimum an.

Aufgabe 4 (Stückweise wegzusammenhängende Räume)
Ein Raum X heißt *stückweise wegzusammenhängend*, falls jeder Punkt von X eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt.

(a) Sind Mannigfaltigkeiten stückweise wegzusammenhängend?

(b) Sind zusammenhängende Mannigfaltigkeiten wegzusammenhängend?

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 24. 11. 2017, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!