Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Gegeben seien die Abbildungen $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to S^2$ durch

$$\varphi_\pm(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ \pm(x^2+y^2-1) \end{pmatrix}$$

und die Punkte $p_\pm := (0,0,\pm 1)$.

(a) Zeigen Sie: Die stereographische Projektion an p_+ bzw. p_- ist genau die Umkehrabbildung von φ_+ bzw. φ_-.

(b) Berechnen Sie den Kartenwechsel $\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-$ und zeigen Sie, dass dieser Kartenwechsel eine C^∞-Abbildung ist.

Aufgabe 2
Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei $p \in F$ und für ein $V \subseteq \mathbb{R}^2$ sei $\varphi : V \to F$ eine Parametrisierung von F um p. Der *Tangentialraum* von F im Punkt p ist definiert als $T_pF := \mathrm{Bild}(d\varphi|_{\varphi^{-1}(p)})$, also das Bild der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$, die durch die Jacobimatrix $d\varphi$ an der Stelle $\varphi^{-1}(p)$ gegeben ist. Zeigen Sie:

(a) Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung φ.

(b) Für $F = S^2$ und $p \in S^2$ ist T_pS^2 das orthogonale Komplement $[p]^\perp$.

Aufgabe 3 (Kartenwechsel für $P^n\mathbb{R}$)
Für $i = 1, \dots, n+1$ sei $U_i := \{[(x_1, \dots, x_{n+1})] \in P^n\mathbb{R} \mid x_i \neq 0\}$ und $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\varphi_i([(x_1, \dots, x_n)]) := \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Zeigen Sie:

(a) $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, \dots, n+1\}$ ist ein differenzierbarer Atlas von $P^n\mathbb{R}$.

(b) $P^n\mathbb{R}$ ist hausdorffsch und hat abzählbare Basis.

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 01. 12. 2017, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!