Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Reguläre Isoflächen)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, und für jeden Punkt p von $S := f^{-1}(0)$ gelte $0 \neq \nabla f(p) := (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))$. Zeigen Sie:

(a) S ist eine reguläre Fläche.

(b) $T_pS = \mathrm{Kern}(\nabla f(p)) := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla f(p) \cdot v = 0\}$ für alle $p \in S$. (Der Tangentialraum T_pS ist definiert wie in Aufgabe 2 von Blatt 6.)

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen, um S lokal als Funktionsgraphen einer differenzierbaren Funktion $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ darzustellen. Der Funktionsgraph von φ ist dann eine reguläre Fläche.

Aufgabe 2 (Vollständige Graphen)
Ein Graph heißt *vollständig*, wenn je zwei seiner Ecken durch eine Kante verbunden sind. Einen vollständigen Graphen mit n Ecken bezeichnet man gewöhnlich mit K_n.

(a) Zeigen Sie: Ist $n \leq 4$, so ist K_n planar.

(b) Was können Sie im Falle $n \geq 5$ über die Planarität von K_n sagen?

Aufgabe 3 (Adjazenzmatrix)
Sei G ein Graph mit der Eckenmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Die *Adjazenzmatrix* dieses Graphen ist $A := ((a_{ij}))_{i,j=1,\ldots,n}$, wobei $a_{ij} = 1$ ist, wenn G eine Kante von v_i nach v_j enthält, sonst $a_{ij} = 0$.

(a) Zeigen Sie für den Spezialfall $G = K_n$, dass $n - 1$ der maximale Eigenwert von A ist.

(b) Zeigen Sie für allgemeines G, dass jeder Eigenwert von A nicht größer als $n - 1$ ist. $\star$

Aufgabe 4 (Bäume)
Sei G ein Graph. Ein *Kreis* in G ist eine Folge $v_0, v_1, \ldots, v_n$ von Ecken ($n \geq 3$) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise verschieden.

(ii) $v_0 = v_n$.

(iii) Für alle $i = 1, \ldots, n$ sind v_{i-1} und v_i durch eine Kante verbunden.

Zeigen Sie: Ein Graph ist genau dann ein Baum, wenn er zusammenhängend ist und keine Kreise besitzt.

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 08. 12. 2017, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!