Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

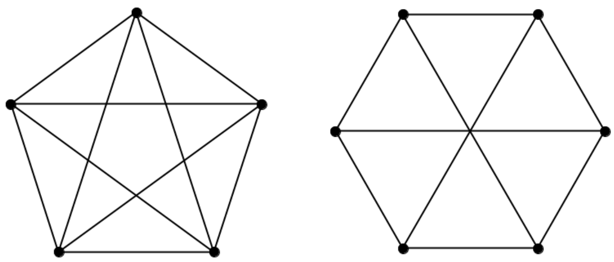
Übungsblatt 8

Aufgabe 1

(a) Sei $n \geq 3$. Sei G ein planarer Graph mit $k(G) \geq n$, der kein Baum ist, sodass alle Kreise in G mindestens Länge n haben. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$k(G) \leq \frac{n}{n-2}(e(G) - 2).$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Graphen nicht planar sind:



Aufgabe 2

Sei $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ der Schiefkörper der Quaternionen, wie in den Tutorien besprochen. Die Menge $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) := \{w\mathbf{1} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{H} \mid w = 0\}$ heißt die Menge der *reinen Quaternionen*. Für $A \in \mathrm{SU}(2)$ und $h \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ definiere $A * h := AhA^{-1}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}, \quad (w,x,y,z) \mapsto w\mathbf{1} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Isometrie. Insbesondere ist $T^1 := T|_{S^3}$ ein Homöomorphismus von S^3 auf $\mathrm{SU}(2)$.

(b) Identifiziert man $\{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \mid w = 0\}$ mit $\mathbb{R}^3$, so ist für jedes $A \in \mathrm{SU}(2)$ die Abbildung

$$\Phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (0,x,y,z) \mapsto T^{-1}(A * T(0,x,y,z))$$

wohldefiniert und orthogonal, d.h. es existiert ein $\tilde{A} \in \mathrm{SO}(3)$ mit

$$\Phi_A \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(c) $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3), \ A \mapsto \tilde{A}$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{Kern}\,\Phi = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$.

Bitte umdrehen!

Aufgabe 3 (Symmetriegruppe des Würfels)
Für einen platonischen Körper $P \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Zentrum 0 heißt die Gruppe

$$\mathrm{Sym}(P) := \{f \in \mathrm{O}(3) \mid f(P) = P\}$$

Symmetriegruppe von P, und die Gruppe

$$\mathrm{Sym}_0(P) := \{f \in \mathrm{SO}(3) \mid f(P) = P\}$$

heißt *eigentliche Symmetriegruppe* von P.

Zeigen Sie für den Fall, dass P ein Würfel ist, folgende Aussagen:

(a) $\mathrm{Sym}(P) \cong S_4 \times \{-1, 1\}$,

(b) $\mathrm{Sym}_0(P) \cong S_4$.

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 15. 12. 2017, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!