Karlsruher Institut für Technologie

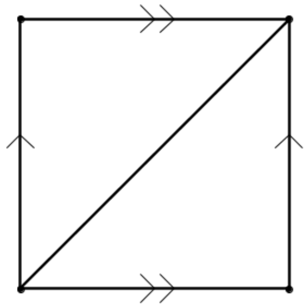
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Marius Graeber

Elementare Geometrie

Übungsblatt 9 (Ferienübungsblatt)

Definition: Eine *triangulierte Fläche* (M, K, t) besteht aus einer Fläche M, einem zweidimensionalen Simplizialkomplex K und einem Homöomorphismus $t : |K| \to M$. Man bezeichnet (K, t) als *Triangulierung* von M. Die *Eulercharakteristik* von M ist definiert als $\chi(M) := \chi(K)$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass jede Fläche M eine Triangulierung besitzt, und dass $\chi(M)$ nicht von der Wahl der Triangulierung abhängt.

Aufgabe 1 (Triangulierung des Torus)
Beschreibt diese Zeichnung eine Triangulierung des Torus T^2?



Aufgabe 2 (Zusammenhängende Summe)
Seien M_1, M_2 zwei Flächen. Beweisen Sie die Gleichheit

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $M_1 \# M_2$ bis auf Homöomorphismus unabhängig von der Wahl der ausgeschnittenen Bälle und der Randverklebung ist, d.h. dass je zwei Mannigfaltigkeiten, die beide zusammenhängende Summen von M_1 und M_2 sind, zueinander homöomorph sind.

Aufgabe 3 (Parametrisierung nach Bogenlänge)
Sei I ein Intervall und $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Kurve mit $\frac{dc}{dt}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Beweisen Sie, dass es ein Intervall J und einen Diffeomorphismus $\varphi : I \to J$ gibt, sodass für die umparametrisierte Kurve $\tilde{c} := c \circ \varphi^{-1}$ die Gleichung $\left\| \frac{d\tilde{c}}{ds}(s) \right\| = 1$ für alle $s \in J$ erfüllt ist.

Aufgabe 4 (Rotationstorus)
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rotationstorus bezüglich der lokalen Parametrisierung

$$x : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (a + r\cos u)\cos v \\ (a + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis spätestens **Freitag, den 12. 01. 2018, um 13:00 Uhr**. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren **Namen**, **Matrikelnummer** und die **Nummer Ihres Tutoriums** an!